Liste d'exercices n^o 7

Exercice 1

Que dire de $b(A, B) := \mathrm{Tr}(\,{}^tA.B)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$? Déterminer sa matrice associée dans la base canonique.

Exercice 2

Soit B une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E. On note $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$, à B on peut associer un endomorphisme $\varphi : E \to E^*$ en posant pour $x \in E$ (si B n'est pas symétrique, il faut bien geler la bonne variable pour retomber sur la définition) :

$$\varphi(x) = B(., x).$$

Montrer que la matrice de B relativement à $\mathcal{B}$ (au sens des matrices de formes bilinéaires) correspond en fait à :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi), \qquad \text{au sens des matrices d'endomorphismes.}$$

Exercice 3

Soit V un espace vectoriel de dimension 3. On considère une base (e_1, e_2, e_3) de V et on écrit tout élément $x \in V$ sous la forme $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Soit q l'application de V dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$q : x \mapsto x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3$$

1. Montrer que c'est une forme quadratique et déterminer la forme bilinéaire associée f.
2. Déterminer la matrice associée à f dans la base (e_i).
3. La forme bilinéaire f est-elle dégénérée ? Déterminer son noyau. Quel est le rang de q ?

Exercice 4

Décomposer en carrés chacune des formes quadratiques suivantes. Déterminer ensuite le rang et la signature.

1.
$$q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : q(x) = x_1^2 - 3x_1x_2$$

2.
$$q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} : q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3$$

3.
$$q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} : q(x) = (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2$$

4.
$$q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R} : q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$$

Exercice 5

Soit f une fonction positive continue sur $[0, 1]$ et soit A la matrice de terme général

$$a_{ij} = \int_0^1 e^{(i+j)t} f(t)\mathrm{d}t$$

On note q la forme quadratique associée à A canoniquement. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que q soit définie positive.

Exercice 6

Soit $(p, q, r) \in \mathbf{R}^3$ un triplet. On considère l'application Q définie sur $\mathbf{R}^3$ par

$$Q(x, y, z) = 2(pyz + qzx + rxy).$$

Justifier que Q est une forme quadratique, déterminer la matrice de sa forme polaire associée. Déterminer ensuite l'orthogonal de l'hyperplan H d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, on pose :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad Q(f) = \lambda \mathrm{Tr}(f^2) + \mu \det(f).$$

1. Vérifier que Q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer le rang et la signature de Q dans les cas $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ et $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.
