Liste d'exercices n^o 9
(espaces euclidiens, groupe orthogonal, matrice symétrique)

Exercice 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $S = A^t\, A$.

1. Montrer que S est symétrique positive ($\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $(AX, X) \geq 0$).

2. Montrer que $ker(S) = ker(A)$.

3. En déduire que $rang(A^t\, A) = rang(A)$.

Exercice 2

$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On définit f comme, $\forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$f(X, Y) = X^t AY.$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.

2. Monter que f est non dégénérée si et seulement si A est inversible.

3. Montrer que f est positive si et seulement si A est positive.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, tel que l'ensemble des valeurs propres de A est inclus dans $[-1, 1]$. Montrer que $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$|(AX, X)| \leq ||X||^2 .$$

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. On note $\mathcal{O}(E)$ le groupe orthogonal de E (c'est-à-dire le groupe des éléments $u \in \mathbf{GL}(E)$ qui préservent le produit scalaire). Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $u(F^\perp) \subset u(F)^\perp$.

2. En déduire que $u(F^\perp) = u(F)^\perp$ (on pourra comparer les dimensions).

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et soit u un endomorphisme symétrique de E. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u est une symétrie orthogonale.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et soit u un endomorphisme symétrique de E. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. déterminer u.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ad - bc = 1$ et $ac + bd = 0$.

2. On pose $a = cos(\alpha)$, $b = sin(\alpha)$, $c = sin(\theta)$ et $d = cos(\theta)$. Donner A en fonction de α. Un tel élément est appelé rotation du plan d'angle α.

3. Que vaut A pour $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \pi$?

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2. Soient x, y deux vecteurs distincts non nuls tels que $\parallel x \parallel = \parallel y \parallel = 1$. Montrer qu'il existe une rotation r telle que $y = r(x)$.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit $u \in SO(E)$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = x_0$ (considérer le polynôme caractéristique de u et montrer qu'il admet une racine positive en analysant son signe en 0 et en $+\infty$).

2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Donner la description géométrique de cette transformation.

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$, $det(A) = -1$.

1. Montrer que $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ad - bc = -1$ et $ac + bd = 0$.

2. On pose $a = cos(\alpha)$, $b = sin(\alpha)$, $c = sin(\theta)$ et $d = cos(\theta)$. Donner A en fonction de α.

3. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de A est $\{-1, 1\}$.

4. On note f l'endormorphisme canoniquement associé à A. En déduire, qu'il existe ϵ_1, ϵ_2 une base orthormée de $\mathbb{R}^2$, $Mat_{(\epsilon_1,\epsilon_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On parle alors de réflexion par rapport à l'axe $vect(\epsilon_1)$.

5. Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale de déterminant -1 et expliciter la base (ϵ_1, ϵ_2) dans ce cas.

Exercice 11

(Notion d'adjoint). Soit $(E, (,))$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $y \in E$ fixé. Montrer qu'il existe un unique élément z de E, tel que quelque soit $x \in E$,

$$(f(x), y) = (x, z)\,.$$

On note alors $z = f^*(y)$. Vérifier que f^* est linéaire.

2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Donner la matrice de f^* dans la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer que $(f^*)^* = f$.

4. Montrer que $ker(f) \subset (Imf^*)^\perp$ et que $ker(f^*) \subset (Imf)^\perp$.

5. en déduire que $ker(f) = (Imf^*)^\perp$ et que $ker(f^*) = (Imf)^\perp$.

6. Que se passe-t-il si f est symétrique ?

7. Montrer que si F est un sev de E stable par $f^* \circ f$, alors $F^\perp$ est aussi stable par $f^* \circ f$.
