Université Bordeaux 1 Année 2007-2008
Licence 3 Mathématiques

Géométrie différentielle,
feuille 2

Exercice 1. *Extrait DS 2006*
On considère les deux ensembles définis par $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, y - x^2 = 0\}$ et $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, xz - y^2 = 0\}$.

(1) Montrer que V est une sous-variété différentielle de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que $W \setminus \{(0, 0, 0)\}$ est une sous-variété différentielle de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble W est-il au voisinage de $(0, 0, 0)$ une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

(3) Montrer à l'aide d'une description explicite que $V \cap W$ est la reunion de deux sous-variétés connexes de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ dont l'une peut-etre paramétrée par

$$\begin{cases} x(u) = u \\ y(u) = u^2 \\ z(u) = u^3. \end{cases}$$

Exercice 2. *Sphère, ellipsoïdes et hyperboloïdes*

– Montrer que la fonction $F : (x, y, z) \mapsto x^2 - y^2 - z^2$ admet un minimum et un maximum sur la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et les déterminer.
– Mêmes questions avec $G : (x, y, z) \mapsto x^2 - 2y^2 - 3z^2$.
– Trouver $\max\{x^2 + y^2 + z^2 \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\}$, avec $a > b > c > 0$.
Donner une interprétation géométrique.

Exercice 3. Soit Σ une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n$ et f une forme linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f restreinte à Σ admet un maximum et un minimum. Que peut on dire du tangent à Σ en ces points ? En déduire que pour tout hyperplan vectoriel H de R^n, il existe $x \in \Sigma$ tel que $H = \overrightarrow{T_x\Sigma}$.
Soit M une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$ et P un point de $\mathbb{R}^n$. On désigne par S_r la sphère de centre P et de rayon r. Montrer qu'il existe deux couples $(m, r) \in M \times \mathbb{R}$ tels que $m \in M \cap S_r$ et que $T_m M \subset T_m S_r$.

Exercice 4. Soit $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + y^2 = 1 \text{ et } x^2 - x + y^2 = 0\}$. Montrer que $C \setminus \{(1, 0, 0)\}$ est une courbe lisse. Utilliser les coordonnées sphérique [c.-à-d. $(u, v) \mapsto (\cos u \sin v, \cos u \cos v, \sin u)$] pour trouver un paramétrage de C. En déduire que C n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$

Exercice 5. *Ficelle dense dans un tore de* $\mathbb{R}^4$

(1) Soit Σ une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
  (a) Montrer que Σ est localement fermée, c'est-à-dire que tout point x de Σ admet un voisinage V dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\Sigma \cap V$ est fermé dans V.
  (b) Donner un exemple de sous-variété ni fermée ni ouverte.

(2) Soit $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = 1\}$. Prouver que T est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$ compacte, connexe par arcs et de dimension 2.

(3) Soit α un réel, on pose

$$\begin{array}{cccc} F_\alpha : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^4 \\ & t & \mapsto & (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(2\pi\alpha t), \sin(2\pi\alpha t)) \end{array}.$$

  (a) Montrer que F_α est une immersion.
  (b) Montrer que si α est rationnel alors $F_\alpha(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$.
  (c) On suppose désormais α irrationnel. Montrer que F_α est injective. Montrer que $F_\alpha(\mathbb{R})$ est dense dans T [on admettra que $\{p + \alpha q \,;\, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$] et que $F_\alpha(\mathbb{R}) \neq T$. Conclure que $F_\alpha(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété.