

Chapitre 3: Étude métrique des surfaces

Le poly se trouve ici
www.math.u-bordeaux.fr/~pmounoud/

On s'intéresse maintenant à la géométrie des surfaces de l'espace \mathbf{R}^3 .

On s'intéresse maintenant à la géométrie des surfaces de l'espace \mathbf{R}^3 . Comme on travaillera presque toujours localement, on va utiliser des systèmes de coordonnées locales.

On s'intéresse maintenant à la géométrie des surfaces de l'espace \mathbf{R}^3 . Comme on travaillera presque toujours localement, on va utiliser des systèmes de coordonnées locales. D'où l'impression de travailler sur une nappe paramétrée.

On s'intéresse maintenant à la géométrie des surfaces de l'espace \mathbf{R}^3 . Comme on travaillera presque toujours localement, on va utiliser des systèmes de coordonnées locales. D'où l'impression de travailler sur une nappe paramétrée.

Dans tout ce qui suit Σ désigne une surface de \mathbf{R}^3 .

Première forme fondamentale

Définition 1

On appelle *première forme fondamentale* de Σ en p , on note I_p , la restriction du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbf{R}^3 à $T_p\Sigma$.

Première forme fondamentale

Définition 1

On appelle *première forme fondamentale* de Σ en p , on note I_p , la restriction du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbf{R}^3 à $T_p\Sigma$. Autrement dit si $(X, Y) \in T_p\Sigma$, par définition

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

Première forme fondamentale

Définition 1

On appelle *première forme fondamentale* de Σ en p , on note I_p , la restriction du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbf{R}^3 à $T_p\Sigma$. Autrement dit si $(X, Y) \in T_p\Sigma$, par définition

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

On a ainsi un produit scalaire sur chaque $T_p\Sigma$ ou si on veut un « champ » de produits scalaires.

Première forme fondamentale

Définition 1

On appelle *première forme fondamentale* de Σ en p , on note I_p , la restriction du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbf{R}^3 à $T_p\Sigma$. Autrement dit si $(X, Y) \in T_p\Sigma$, par définition

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

On a ainsi un produit scalaire sur chaque $T_p\Sigma$ ou si on veut un « champ » de produits scalaires.

Pour exprimer globalement I_p , il faut une base de $T_p\Sigma$.

Première forme fondamentale

Définition 1

On appelle *première forme fondamentale* de Σ en p , on note I_p , la restriction du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbf{R}^3 à $T_p\Sigma$. Autrement dit si $(X, Y) \in T_p\Sigma$, par définition

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

On a ainsi un produit scalaire sur chaque $T_p\Sigma$ ou si on veut un « champ » de produits scalaires.

Pour exprimer globalement I_p , il faut une base de $T_p\Sigma$. Il n'y en a pas de naturelle. . .

Première forme fondamentale

Définition 1

On appelle *première forme fondamentale* de Σ en p , on note I_p , la restriction du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbf{R}^3 à $T_p\Sigma$. Autrement dit si $(X, Y) \in T_p\Sigma$, par définition

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

On a ainsi un produit scalaire sur chaque $T_p\Sigma$ ou si on veut un « champ » de produits scalaires.

Pour exprimer globalement I_p , il faut une base de $T_p\Sigma$. Il n'y en a pas de naturelle. . .sauf à choisir des coordonnées (U, f) au voisinage de p .

Soit (U, f) des coordonnées au voisinage de p .

Soit (U, f) des coordonnées au voisinage de p . Pour tout $x \in U$ les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ forment une base naturelle de $T_{f(x)}\Sigma$.

Soit (U, f) des coordonnées au voisinage de p . Pour tout $x \in U$ les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ forment une base naturelle de $T_{f(x)}\Sigma$.

Remarquons que $X \in T_p\Sigma$ a pour coordonnées (ξ_1, ξ_2) dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$ **ssi** $X = D_x f(\xi_1, \xi_2)$.

Soit (U, f) des coordonnées au voisinage de p . Pour tout $x \in U$ les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ forment une base naturelle de $T_{f(x)}\Sigma$.

Remarquons que $X \in T_p\Sigma$ a pour coordonnées (ξ_1, ξ_2) dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$ **ssi** $X = D_x f(\xi_1, \xi_2)$.

On note $\alpha_f(x)$ la matrice de $I_{f(x)}$ dans cette base :

Soit (U, f) des coordonnées au voisinage de p . Pour tout $x \in U$ les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ forment une base naturelle de $T_{f(x)}\Sigma$.

Remarquons que $X \in T_p\Sigma$ a pour coordonnées (ξ_1, ξ_2) dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$ **ssi** $X = D_x f(\xi_1, \xi_2)$.

On note $\alpha_f(x)$ la matrice de $I_{f(x)}$ dans cette base :

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle \end{pmatrix}$$

Soit (U, f) des coordonnées au voisinage de p . Pour tout $x \in U$ les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ forment une base naturelle de $T_{f(x)}\Sigma$.

Remarquons que $X \in T_p\Sigma$ a pour coordonnées (ξ_1, ξ_2) dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$ **ssi** $X = D_x f(\xi_1, \xi_2)$.

On note $\alpha_f(x)$ la matrice de $I_{f(x)}$ dans cette base :

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle \end{pmatrix} = {}^t J_x f \cdot J_x f =$$

Soit (U, f) des coordonnées au voisinage de p . Pour tout $x \in U$ les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ forment une base naturelle de $T_{f(x)}\Sigma$.

Remarquons que $X \in T_p\Sigma$ a pour coordonnées (ξ_1, ξ_2) dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$ **ssi** $X = D_x f(\xi_1, \xi_2)$.

On note $\alpha_f(x)$ la matrice de $I_{f(x)}$ dans cette base :

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle \end{pmatrix} = {}^t J_x f \cdot J_x f = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

Soit (U, f) des coordonnées au voisinage de p . Pour tout $x \in U$ les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ forment une base naturelle de $T_{f(x)}\Sigma$.

Remarquons que $X \in T_p\Sigma$ a pour coordonnées (ξ_1, ξ_2) dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$ ssi $X = D_x f(\xi_1, \xi_2)$.

On note $\alpha_f(x)$ la matrice de $I_{f(x)}$ dans cette base :

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle \end{pmatrix} = {}^t J_x f \cdot J_x f = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

où $J_x f$ désigne la jacobienne de f en x et t la transposition.

Soit (U, f) des coordonnées au voisinage de p . Pour tout $x \in U$ les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ forment une base naturelle de $T_{f(x)}\Sigma$.

Remarquons que $X \in T_p\Sigma$ a pour coordonnées (ξ_1, ξ_2) dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$ **ssi** $X = D_x f(\xi_1, \xi_2)$.

On note $\alpha_f(x)$ la matrice de $I_{f(x)}$ dans cette base :

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \rangle \end{pmatrix} = {}^t J_x f \cdot J_x f = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

où $J_x f$ désigne la jacobienne de f en x et t la transposition.

Si $X = D_x f(\xi)$, $Y = D_x f(\zeta)$ alors

$$\langle X, Y \rangle = {}^t \xi \alpha_f(x) \zeta.$$

Définition 2

L'application lisse de U dans l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre 2 ainsi définie est appelée l'expression de la première forme fondamentale dans les coordonnées (U, f) .

Définition 2

L'application lisse de U dans l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre 2 ainsi définie est appelée l'expression de la première forme fondamentale dans les coordonnées (U, f) .

Cette application dépend fortement du système de coordonnées choisi, mais on sait dire ce qu'elle devient quand on change de coordonnées.

Définition 2

L'application lisse de U dans l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre 2 ainsi définie est appelée l'expression de la première forme fondamentale dans les coordonnées (U, f) .

Cette application dépend fortement du système de coordonnées choisi, mais on sait dire ce qu'elle devient quand on change de coordonnées.

Proposition 3

Si (U, f) et (V, g) sont deux systèmes de coordonnées sur Σ et si ψ est un changement de coordonnées tel que $g = f \circ \psi$, alors

Définition 2

L'application lisse de U dans l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre 2 ainsi définie est appelée l'expression de la première forme fondamentale dans les coordonnées (U, f) .

Cette application dépend fortement du système de coordonnées choisi, mais on sait dire ce qu'elle devient quand on change de coordonnées.

Proposition 3

Si (U, f) et (V, g) sont deux systèmes de coordonnées sur Σ et si ψ est un changement de coordonnées tel que $g = f \circ \psi$, alors

$$\alpha_g(x) = {}^t J_x \psi \cdot \alpha_f(\psi(x)) \cdot J_x \psi,$$

où $J\psi$ désigne la jacobienne de ψ et \cdot la multiplication matricielle.

Preuve :

Par définition on a $\alpha_g(x) = {}^t J_x g \cdot J_x g$.

Preuve :

Par définition on a $\alpha_g(x) = {}^t J_x g \cdot J_x g$. La formule de dérivations des compositions nous dit que $J_x g = J_{\psi(x)} f \cdot J_x \psi$,

Preuve :

Par définition on a $\alpha_g(x) = {}^t J_x g \cdot J_x g$. La formule de dérivations des compositions nous dit que $J_x g = J_{\psi(x)} f \cdot J_x \psi$, d'où

$$\alpha_g(x) = {}^t(J_{\psi(x)} f \cdot J_x \psi)(J_{\psi(x)} f \cdot J_x \psi)$$

Preuve :

Par définition on a $\alpha_g(x) = {}^t J_x g \cdot J_x g$. La formule de dérivations des compositions nous dit que $J_x g = J_{\psi(x)} f \cdot J_x \psi$, d'où

$$\begin{aligned} \alpha_g(x) &= {}^t (J_{\psi(x)} f \cdot J_x \psi) (J_{\psi(x)} f \cdot J_x \psi) \\ &= {}^t J_x \psi \cdot ({}^t J_{\psi(x)} f \cdot J_{\psi(x)} f) J_x \psi \end{aligned}$$

Preuve :

Par définition on a $\alpha_g(x) = {}^t J_x g \cdot J_x g$. La formule de dérivations des compositions nous dit que $J_x g = J_{\psi(x)} f \cdot J_x \psi$, d'où

$$\begin{aligned}
 \alpha_g(x) &= {}^t (J_{\psi(x)} f \cdot J_x \psi) (J_{\psi(x)} f \cdot J_x \psi) \\
 &= {}^t J_x \psi \cdot ({}^t J_{\psi(x)} f \cdot J_{\psi(x)} f) J_x \psi \\
 &= {}^t J_x \psi \cdot \alpha_f(\psi(x)) \cdot J_x \psi. \quad \square
 \end{aligned}$$

Exemple 4

On considère les coordonnées locales (U, f) sur la sphère S^2 , où $U = \mathbf{D}_2$ et $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$.

Exemple 4

On considère les coordonnées locales (U, f) sur la sphère S^2 , où $U = \mathbf{D}_2$ et $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$.

$$J_x f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \end{pmatrix},$$

et $\alpha_f(x) = {}^t J_x f J_x f$, d'où

Exemple 4

On considère les coordonnées locales (U, f) sur la sphère S^2 , où $U = \mathbf{D}_2$ et $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$.

$$J_x f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \end{pmatrix},$$

et $\alpha_f(x) = {}^t J_x f J_x f$, d'où

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x_1^2}{1-x_1^2-x_2^2} & \frac{x_1 x_2}{1-x_1^2-x_2^2} \\ \frac{x_1 x_2}{1-x_1^2-x_2^2} & 1 + \frac{x_2^2}{1-x_1^2-x_2^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-x_1^2-x_2^2} \begin{pmatrix} 1-x_2^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & 1-x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 5

On prend maintenant les coordonnées géographiques sur S^2 , ie les coordonnées (V, g) où $V =] - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et

$$g(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

Exemple 5

On prend maintenant les coordonnées géographiques sur S^2 , ie les coordonnées (V, g) où $V =] - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et

$$g(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

$(f(U) \neq g(V))$, mais on peut restreindre U et V pour que ce soit le cas).

Exemple 5

On prend maintenant les coordonnées géographiques sur S^2 , ie les coordonnées (V, g) où $V =] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\times] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et

$$g(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

$(f(U) \neq g(V))$, mais on peut restreindre U et V pour que ce soit le cas).

Cette fois

$$J_{(u,v)}g = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \alpha_g = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Longueur

L'expression α_f contient suffisamment d'information sur la géométrie de Σ pour qu'on puisse (parfois) travailler uniquement sur $U \subset \mathbf{R}^2$ sans repasser par \mathbf{R}^3 .

Longueur

L'expression α_f contient suffisamment d'information sur la géométrie de Σ pour qu'on puisse (parfois) travailler uniquement sur $U \subset \mathbf{R}^2$ sans repasser par \mathbf{R}^3 .
On veut par exemple calculer la longueur de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ de classe C^1 .

Longueur

L'expression α_f contient suffisamment d'information sur la géométrie de Σ pour qu'on puisse (parfois) travailler uniquement sur $U \subset \mathbf{R}^2$ sans repasser par \mathbf{R}^3 . On veut par exemple calculer la longueur de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ de classe C^1 . Si $\gamma([0, 1]) \subset f(U)$, on a vu au chapitre précédent qu'il existe $c : [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 tel que $\gamma = f \circ c$.

Longueur

L'expression α_f contient suffisamment d'information sur la géométrie de Σ pour qu'on puisse (parfois) travailler uniquement sur $U \subset \mathbf{R}^2$ sans repasser par \mathbf{R}^3 .

On veut par exemple calculer la longueur de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ de classe C^1 . Si $\gamma([0, 1]) \subset f(U)$, on a vu au chapitre précédent qu'il existe $c : [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 tel que $\gamma = f \circ c$.

On a $\gamma'(t) = D_{c(t)}f(c'(t))$ et donc

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$$

Longueur

L'expression α_f contient suffisamment d'information sur la géométrie de Σ pour qu'on puisse (parfois) travailler uniquement sur $U \subset \mathbf{R}^2$ sans repasser par \mathbf{R}^3 .

On veut par exemple calculer la longueur de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ de classe C^1 . Si $\gamma([0, 1]) \subset f(U)$, on a vu au chapitre précédent qu'il existe $c : [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 tel que $\gamma = f \circ c$.

On a $\gamma'(t) = D_{c(t)}f(c'(t))$ et donc

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \langle D_{c(t)}f(c'(t)), D_{c(t)}f(c'(t)) \rangle^{1/2} dt$$

Longueur

L'expression α_f contient suffisamment d'information sur la géométrie de Σ pour qu'on puisse (parfois) travailler uniquement sur $U \subset \mathbf{R}^2$ sans repasser par \mathbf{R}^3 .

On veut par exemple calculer la longueur de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ de classe C^1 . Si $\gamma([0, 1]) \subset f(U)$, on a vu au chapitre précédent qu'il existe $c : [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 tel que $\gamma = f \circ c$.

On a $\gamma'(t) = D_{c(t)}f(c'(t))$ et donc

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \langle D_{c(t)}f(c'(t)), D_{c(t)}f(c'(t)) \rangle^{1/2} dt \\ &= \int_0^1 ({}^t c'(t) \cdot \alpha_f(c(t)) \cdot c'(t))^{1/2} dt \end{aligned}$$

Longueur

L'expression α_f contient suffisamment d'information sur la géométrie de Σ pour qu'on puisse (parfois) travailler uniquement sur $U \subset \mathbf{R}^2$ sans repasser par \mathbf{R}^3 .

On veut par exemple calculer la longueur de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ de classe C^1 . Si $\gamma([0, 1]) \subset f(U)$, on a vu au chapitre précédent qu'il existe $c : [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 tel que $\gamma = f \circ c$.

On a $\gamma'(t) = D_{c(t)}f(c'(t))$ et donc

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \langle D_{c(t)}f(c'(t)), D_{c(t)}f(c'(t)) \rangle^{1/2} dt \\ &= \int_0^1 ({}^t c'(t) \cdot \alpha_f(c(t)) \cdot c'(t))^{1/2} dt \end{aligned}$$

Cela signifie qu'on peut calculer la longueur d'une route (γ) à partir de son tracé sur une carte (c), mais pour cela il faut connaître la première forme fondamentale associée à la carte.

Longueur

L'expression α_f contient suffisamment d'information sur la géométrie de Σ pour qu'on puisse (parfois) travailler uniquement sur $U \subset \mathbf{R}^2$ sans repasser par \mathbf{R}^3 .

On veut par exemple calculer la longueur de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ de classe C^1 . Si $\gamma([0, 1]) \subset f(U)$, on a vu au chapitre précédent qu'il existe $c : [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 tel que $\gamma = f \circ c$.

On a $\gamma'(t) = D_{c(t)}f(c'(t))$ et donc

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \langle D_{c(t)}f(c'(t)), D_{c(t)}f(c'(t)) \rangle^{1/2} dt \\ &= \int_0^1 ({}^t c'(t) \cdot \alpha_f(c(t)) \cdot c'(t))^{1/2} dt \end{aligned}$$

Cela signifie qu'on peut calculer la longueur d'une route (γ) à partir de son tracé sur une carte (c), mais pour cela il faut connaître la première forme fondamentale associée à la carte. En particulier, il peut être difficile de trouver le plus court chemin entre deux points.

Même chose pour les angles.

Même chose pour les angles. L'angle (ou du moins sa mesure) entre deux vecteurs non nuls X et Y de \mathbf{R}^3 est $\arccos\langle \frac{1}{\|X\|}X, \frac{1}{\|Y\|}Y \rangle$.

Même chose pour les angles. L'angle (ou du moins sa mesure) entre deux vecteurs non nuls X et Y de \mathbf{R}^3 est $\arccos\langle \frac{1}{\|X\|}X, \frac{1}{\|Y\|}Y \rangle$.

Si ces deux vecteurs appartiennent à $T_p\Sigma$, il existe ξ et ζ non nuls dans \mathbf{R}^2 tels $D_f(\xi) = X$ et $D_x f(\zeta) = Y$. Ainsi, l'angle entre X et Y est égal à

$$\arccos\left(\frac{{}^tV}{({}^tV\alpha_f(p)V)^{1/2}}\alpha_f(p)\frac{W}{({}^tW\alpha_f(p)W)^{1/2}}\right).$$

Exemple 6

Imaginons le Loup et le Petit Chaperon Rouge allant de Minneapolis à Ulan Bator.

Exemple 6

Imaginons le Loup et le Petit Chaperon Rouge allant de Minneapolis à Ulan Bator. Admettons que ces villes sont situées sur le 45ème parallèle et qu'il y a une différence de longitude de 180 degré.

Exemple 6

Imaginons le Loup et le Petit Chaperon Rouge allant de Minneapolis à Ulan Bator. Admettons que ces villes sont situées sur le 45ème parallèle et qu'il y a une différence de longitude de 180 degré.

On donne au loup une carte réalisée avec (V, g) de l'exemple 5 et au PCR une réalisée avec (U, f) de l'exemple 4.

Exemple 6

Imaginons le Loup et le Petit Chaperon Rouge allant de Minneapolis à Ulan Bator. Admettons que ces villes sont situées sur le 45ème parallèle et qu'il y a une différence de longitude de 180 degré.

On donne au loup une carte réalisée avec (V, g) de l'exemple 5 et au PCR une réalisée avec (U, f) de l'exemple 4. Chacun part donc en ligne droite

Exemple 6

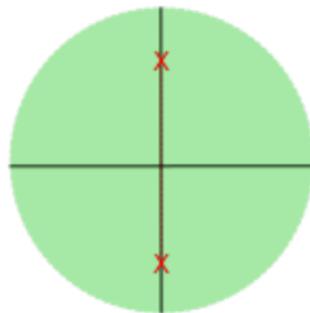
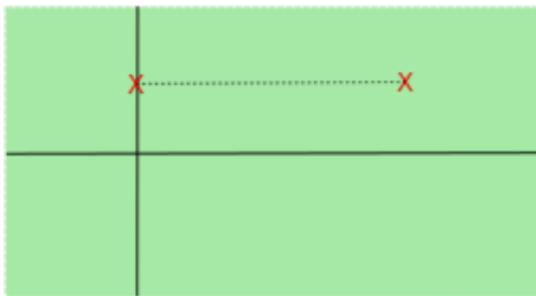
Imaginons le Loup et le Petit Chaperon Rouge allant de Minneapolis à Ulan Bator. Admettons que ces villes sont situées sur le 45ème parallèle et qu'il y a une différence de longitude de 180 degré.

On donne au loup une carte réalisée avec (V, g) de l'exemple 5 et au PCR une réalisée avec (U, f) de l'exemple 4. Chacun part donc en ligne droite... sur sa carte.

Exemple 6

Imaginons le Loup et le Petit Chaperon Rouge allant de Minneapolis à Ulan Bator. Admettons que ces villes sont situées sur le 45ème parallèle et qu'il y a une différence de longitude de 180 degré.

On donne au loup une carte réalisée avec (V, g) de l'exemple 5 et au PCR une réalisée avec (U, f) de l'exemple 4. Chacun part donc en ligne droite... sur sa carte.



À gauche les villes ont pour coordonnées $(0, \pi/4)$ et $(\pi, \pi/4)$.

À droite $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Sur sa carte, le loup suit le chemin $c_1 : [0, \pi] \rightarrow V$ défini par $c_1(t) = (t, \pi/4)$. Il parcourt donc une longueur égale à $\int_0^\pi \cos(\pi/4) dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ (l'unité étant le rayon terrestre).

Sur sa carte, le loup suit le chemin $c_1 : [0, \pi] \rightarrow V$ défini par $c_1(t) = (t, \pi/4)$. Il parcourt donc une longueur égale à $\int_0^\pi \cos(\pi/4) dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ (l'unité étant le rayon terrestre).

Sur sa carte, PCR suit $c_2 : [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \rightarrow U$ défini par $c_2(t) = (0, t)$ (elle passe par le pôle nord). Sa longueur est donnée par $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2}$. C'est beaucoup plus court !

Sur sa carte, le loup suit le chemin $c_1 : [0, \pi] \rightarrow V$ défini par $c_1(t) = (t, \pi/4)$. Il parcourt donc une longueur égale à $\int_0^\pi \cos(\pi/4) dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ (l'unité étant le rayon terrestre).

Sur sa carte, PCR suit $c_2 : [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \rightarrow U$ défini par $c_2(t) = (0, t)$ (elle passe par le pôle nord). Sa longueur est donnée par $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2}$. C'est beaucoup plus court ! mais comme elle s'arrête en chemin...

On voit que deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) telles que $\alpha_f = \alpha_g$ paraissent identiques à leurs habitants tant qu'ils n'ont pas conscience de l'espace \mathbf{R}^3 qui les entoure et ce même si $f(U)$ et $f(V)$ n'ont rien à voir.

On voit que deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) telles que $\alpha_f = \alpha_g$ paraissent identiques à leurs habitants tant qu'ils n'ont pas conscience de l'espace \mathbf{R}^3 qui les entoure et ce même si $f(U)$ et $f(V)$ n'ont rien à voir. Tout ce qu'ils peuvent mesurer localement sans quitter la surface sera identique.

On voit que deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) telles que $\alpha_f = \alpha_g$ paraissent identiques à leurs habitants tant qu'ils n'ont pas conscience de l'espace \mathbf{R}^3 qui les entoure et ce même si $f(U)$ et $f(V)$ n'ont rien à voir.

Tout ce qu'ils peuvent mesurer localement sans quitter la surface sera identique. C'est un peu comme si on avait deux cartes (géographiques) identiques correspondant à deux parties distinctes du globe.

On voit que deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) telles que $\alpha_f = \alpha_g$ paraissent identiques à leurs habitants tant qu'ils n'ont pas conscience de l'espace \mathbf{R}^3 qui les entoure et ce même si $f(U)$ et $f(V)$ n'ont rien à voir.

Tout ce qu'ils peuvent mesurer localement sans quitter la surface sera identique. C'est un peu comme si on avait deux cartes (géographiques) identiques correspondant à deux parties distinctes du globe.

Ainsi, les habitants d'un cylindre droit (qui ne se déplacent pas trop) ont l'impression de vivre dans un plan.

On voit que deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) telles que $\alpha_f = \alpha_g$ paraissent identiques à leurs habitants tant qu'ils n'ont pas conscience de l'espace \mathbf{R}^3 qui les entoure et ce même si $f(U)$ et $f(V)$ n'ont rien à voir.

Tout ce qu'ils peuvent mesurer localement sans quitter la surface sera identique. C'est un peu comme si on avait deux cartes (géographiques) identiques correspondant à deux parties distinctes du globe.

Ainsi, les habitants d'un cylindre droit (qui ne se déplacent pas trop) ont l'impression de vivre dans un plan. En effet, on trouve facilement (exercice) un paramétrage local (U, f) du cylindre droit tel que $\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question

Pourrait-on trouver une carte sur laquelle les longueurs (ou au moins les angles) lues sont corrects ?

Question

Pourrait-on trouver une carte sur laquelle les longueurs (ou au moins les angles) lues sont corrects ?

Si on se donne des coordonnées (U, f) . Les longueurs que l'on « voit » sur U sont les vraies longueurs (ie celles sur Σ) à un facteur près si et seulement s'il existe

$C > 0$ (l'échelle) telle que $\alpha_f = C^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question

Pourrait-on trouver une carte sur laquelle les longueurs (ou au moins les angles) lues sont corrects ?

Si on se donne des coordonnées (U, f) . Les longueurs que l'on « voit » sur U sont les vraies longueurs (ie celles sur Σ) à un facteur près si et seulement si il existe

$C > 0$ (l'échelle) telle que $\alpha_f = C^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sur toutes les mappemondes les longueurs lues sont fausses.

Question

Pourrait-on trouver une carte sur laquelle les longueurs (ou au moins les angles) lus sont corrects ?

Si on se donne des coordonnées (U, f) . Les longueurs que l'on « voit » sur U sont les vraies longueurs (ie celles sur Σ) à un facteur près si et seulement s'il existe

$C > 0$ (l'échelle) telle que $\alpha_f = C^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sur toutes les mappemondes les longueurs lues sont fausses.

Les angles lus (par exemple avec un rapporteur) sur une carte sont les angles réels

s'il existe une fonction ℓ à valeurs positives telle que $\alpha_f(x) = \ell(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question

Pourrait-on trouver une carte sur laquelle les longueurs (ou au moins les angles) lus sont corrects ?

Si on se donne des coordonnées (U, f) . Les longueurs que l'on « voit » sur U sont les vraies longueurs (ie celles sur Σ) à un facteur près si et seulement s'il existe

$C > 0$ (l'échelle) telle que $\alpha_f = C^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sur toutes les mappemondes les longueurs lues sont fausses.

Les angles lus (par exemple avec un rapporteur) sur une carte sont les angles réels

s'il existe une fonction ℓ à valeurs positives telle que $\alpha_f(x) = \ell(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sur beaucoup de mappemondes cette condition est vérifiée (pour des raisons esthétiques et pratiques).

Exercice 1 (Projection de Mercator)

Soit (V, g) les coordonnées géographiques. Montrer qu'il existe un changement de coordonnées ψ de la forme $(x, y) \mapsto (x, h(y))$ tel que $\alpha_{g \circ \psi}(x) = \ell(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où ℓ est une fonction positive.

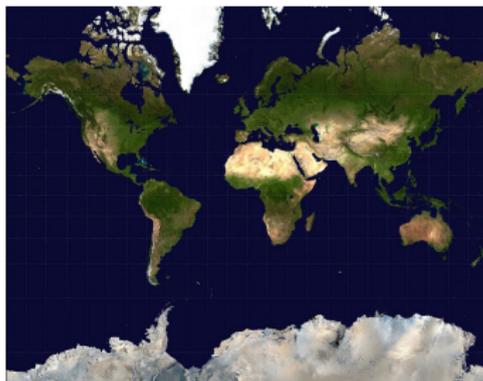
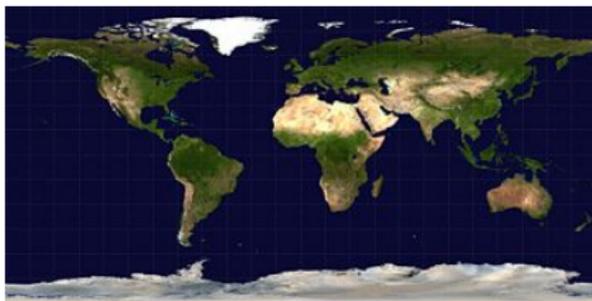


FIGURE – Carte réalisées avec les coordonnées géographiques puis de Mercator (source : wikipedia)

Application de Gauss.

On dit que les Grecs avaient déduit le fait que la terre est ronde de l'observation des mâts des bateaux arrivant à l'horizon. Nous voulons faire la même chose.

Application de Gauss.

On dit que les Grecs avaient déduit le fait que la terre est ronde de l'observation des mâts des bateaux arrivant à l'horizon. Nous voulons faire la même chose. On commence par équiper Σ de mâts.

Application de Gauss.

On dit que les Grecs avaient déduit le fait que la terre est ronde de l'observation des mâts des bateaux arrivant à l'horizon. Nous voulons faire la même chose. On commence par équiper Σ de mâts.

Définition 7

Une application $\nu : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbf{R}^3$ est une application de Gauss de Σ si ν est continue et si pour tout $p \in \Sigma$, $\nu(p)$ est perpendiculaire à $T_p\Sigma$.

Application de Gauss.

On dit que les Grecs avaient déduit le fait que la terre est ronde de l'observation des mâts des bateaux arrivant à l'horizon. Nous voulons faire la même chose. On commence par équiper Σ de mâts.

Définition 7

Une application $\nu : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbf{R}^3$ est une application de Gauss de Σ si ν est continue et si pour tout $p \in \Sigma$, $\nu(p)$ est perpendiculaire à $T_p\Sigma$.

On voit par exemple que l'identité est une application de Gauss de la sphère S^2 .

Application de Gauss.

On dit que les Grecs avaient déduit le fait que la terre est ronde de l'observation des mâts des bateaux arrivant à l'horizon. Nous voulons faire la même chose. On commence par équiper Σ de mâts.

Définition 7

Une application $\nu : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbf{R}^3$ est une application de Gauss de Σ si ν est continue et si pour tout $p \in \Sigma$, $\nu(p)$ est perpendiculaire à $T_p\Sigma$.

On voit par exemple que l'identité est une application de Gauss de la sphère S^2 .

Si ν est une application de Gauss alors $-\nu$ aussi.

Application de Gauss.

On dit que les Grecs avaient déduit le fait que la terre est ronde de l'observation des mâts des bateaux arrivant à l'horizon. Nous voulons faire la même chose. On commence par équiper Σ de mâts.

Définition 7

Une application $\nu : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbf{R}^3$ est une application de Gauss de Σ si ν est continue et si pour tout $p \in \Sigma$, $\nu(p)$ est perpendiculaire à $T_p\Sigma$.

On voit par exemple que l'identité est une application de Gauss de la sphère S^2 .

Si ν est une application de Gauss alors $-\nu$ aussi.

Il est facile de voir que lorsque Σ est connexe elle a au plus deux applications de Gauss.

Application de Gauss.

On dit que les Grecs avaient déduit le fait que la terre est ronde de l'observation des mâts des bateaux arrivant à l'horizon. Nous voulons faire la même chose. On commence par équiper Σ de mâts.

Définition 7

Une application $\nu : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbf{R}^3$ est une application de Gauss de Σ si ν est continue et si pour tout $p \in \Sigma$, $\nu(p)$ est perpendiculaire à $T_p\Sigma$.

On voit par exemple que l'identité est une application de Gauss de la sphère S^2 .

Si ν est une application de Gauss alors $-\nu$ aussi.

Il est facile de voir que lorsque Σ est connexe elle a au plus deux applications de Gauss.

Il n'en existe pas toujours, on se convainc facilement du fait qu'un ruban de Möbius ne possède pas d'application de Gauss.

Si Σ est une nappe, il n'y a pas de problèmes. En effet si (U, f) est un paramétrage de Σ alors l'application $\nu = N_f \circ f^{-1}$ où N_f est définie par

$$N_f(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|}$$

est une application de Gauss.

Si Σ est une nappe, il n'y a pas de problèmes. En effet si (U, f) est un paramétrage de Σ alors l'application $\nu = N_f \circ f^{-1}$ où N_f est définie par

$$N_f(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|}$$

est une application de Gauss. On l'appelle l'application de Gauss associée à (U, f) .

Si Σ est une nappe, il n'y a pas de problèmes. En effet si (U, f) est un paramétrage de Σ alors l'application $\nu = N_f \circ f^{-1}$ où N_f est définie par

$$N_f(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|}$$

est une application de Gauss. On l'appelle l'application de Gauss associée à (U, f) . On remarque que l'application N_f est lisse (du moins si f l'est).

Si Σ est une nappe, il n'y a pas de problèmes. En effet si (U, f) est un paramétrage de Σ alors l'application $\nu = N_f \circ f^{-1}$ où N_f est définie par

$$N_f(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|}$$

est une application de Gauss. On l'appelle l'application de Gauss associée à (U, f) . On remarque que l'application N_f est lisse (du moins si f l'est).

Proposition 8

Soient (U, f) un paramétrage de Σ et $\phi : V \rightarrow U$ un difféomorphisme lisse. Les paramétrages (U, f) et $(V, f \circ \phi)$ définissent la même application de Gauss sur Σ si et seulement si $\det(J\phi) > 0$ sur V .

Si Σ est une nappe, il n'y a pas de problèmes. En effet si (U, f) est un paramétrage de Σ alors l'application $\nu = N_f \circ f^{-1}$ où N_f est définie par

$$N_f(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|}$$

est une application de Gauss. On l'appelle l'application de Gauss associée à (U, f) . On remarque que l'application N_f est lisse (du moins si f l'est).

Proposition 8

Soient (U, f) un paramétrage de Σ et $\phi : V \rightarrow U$ un difféomorphisme lisse. Les paramétrages (U, f) et $(V, f \circ \phi)$ définissent la même application de Gauss sur Σ si et seulement si $\det(J\phi) > 0$ sur V .

On dit alors qu'ils définissent la même orientation sur Σ .

Preuve :

Soit $x \in U$ et $y = \phi^{-1}(x)$. On note $J_y\phi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

Preuve :

Soit $x \in U$ et $y = \phi^{-1}(x)$. On note $J_y\phi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

d'où

$$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x_1}(y) \wedge \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x_2}(y) = \left(a \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + b \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) \wedge \left(c \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + d \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Preuve :

Soit $x \in U$ et $y = \phi^{-1}(x)$. On note $J_y\phi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

d'où

$$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x_1}(y) \wedge \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x_2}(y) = \left(a \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + b \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) \wedge \left(c \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + d \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Le produit vectoriel étant bilinéaire alterné, on a donc

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_1}(y) \wedge \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_2}(y) = (ad - bc) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) =$$

Preuve :

Soit $x \in U$ et $y = \phi^{-1}(x)$. On note $J_y\phi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

d'où

$$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x_1}(y) \wedge \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x_2}(y) = \left(a \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + b \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) \wedge \left(c \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + d \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Le produit vectoriel étant bilinéaire alterné, on a donc

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_1}(y) \wedge \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_2}(y) = (ad - bc) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \det(J_y\phi) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x). \square$$

Preuve :

Soit $x \in U$ et $y = \phi^{-1}(x)$. On note $J_y\phi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

d'où

$$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x_1}(y) \wedge \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x_2}(y) = \left(a \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + b \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) \wedge \left(c \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + d \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Le produit vectoriel étant bilinéaire alterné, on a donc

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_1}(y) \wedge \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_2}(y) = (ad - bc) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \det(J_y\phi) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x). \square$$

Dorénavant nous orientons Σ c'est-à-dire nous n'autorisons que les changements de coordonnées dont le jacobien est positif.

Preuve :

Soit $x \in U$ et $y = \phi^{-1}(x)$. On note $J_y\phi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

d'où

$$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x_1}(y) \wedge \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x_2}(y) = \left(a \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + b \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) \wedge \left(c \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + d \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Le produit vectoriel étant bilinéaire alterné, on a donc

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_1}(y) \wedge \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_2}(y) = (ad - bc) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \det(J_y\phi) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x). \square$$

Dorénavant nous orientons Σ c'est-à-dire nous n'autorisons que les changements de coordonnées dont le jacobien est positif.

D'après la proposition 8, tous les paramétrages d'une nappe orientée définissent la même application de Gauss. On l'appelle donc l'application de Gauss de la nappe orientée.

Exercice 2

- 1 Déterminer l'application de Gauss de la nappe paramétrée par $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$.

Exercice 2

- 1 Déterminer l'application de Gauss de la nappe paramétrée par $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$.
- 2 Soient Σ une nappe orientée paramétrée par (U, f) et Ψ une isométrie de \mathbf{R}^3 de partie linéaire $d\Psi$. On note $\Psi(\Sigma)$ la nappe orientée paramétrée par $(U, \Psi \circ f)$.

Exercice 2

- 1 Déterminer l'application de Gauss de la nappe paramétrée par $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$.
- 2 Soient Σ une nappe orientée paramétrée par (U, f) et Ψ une isométrie de \mathbf{R}^3 de partie linéaire $d\Psi$. On note $\Psi(\Sigma)$ la nappe orientée paramétrée par $(U, \Psi \circ f)$.
Montrer que $\nu_{\Psi(\Sigma)}(\Psi \circ f(x)) = \eta d\Psi(\nu_{\Sigma}(f(x)))$, où η est le signe du déterminant de $d\Psi$.

Aire d'une surface.

On cherche à munir Σ d'une mesure μ correspondant à notre idée intuitive d'aire (qui n'est pas si évidente à expliciter).

Aire d'une surface.

On cherche à munir Σ d'une mesure μ correspondant à notre idée intuitive d'aire (qui n'est pas si évidente à expliciter).

Il ne s'agit en aucun cas de la restriction de la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^3 à Σ .

Aire d'une surface.

On cherche à munir Σ d'une mesure μ correspondant à notre idée intuitive d'aire (qui n'est pas si évidente à expliciter).

Il ne s'agit en aucun cas de la restriction de la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^3 à Σ .

On suppose que Σ est une nappe plongée paramétrée par (U, f) .

Aire d'une surface.

On cherche à munir Σ d'une mesure μ correspondant à notre idée intuitive d'aire (qui n'est pas si évidente à expliciter).

Il ne s'agit en aucun cas de la restriction de la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^3 à Σ .

On suppose que Σ est une nappe plongée paramétrée par (U, f) .

Toute mesure sur Σ se rattache via f en une mesure sur U . Inversement toute mesure sur U définit une mesure sur Σ , mais en général cette mesure dépend du choix de (U, f) .

Aire d'une surface.

On cherche à munir Σ d'une mesure μ correspondant à notre idée intuitive d'aire (qui n'est pas si évidente à expliciter).

Il ne s'agit en aucun cas de la restriction de la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^3 à Σ .

On suppose que Σ est une nappe plongée paramétrée par (U, f) .

Toute mesure sur Σ se rattache via f en une mesure sur U . Inversement toute mesure sur U définit une mesure sur Σ , mais en général cette mesure dépend du choix de (U, f) . On ne peut pas poser $\mu(D) = \lambda(f^{-1}(D))$, où λ est la mesure de Lebesgue. Le résultat dépendrait du choix de f .

Proposition 9

Soient (U, f) et (V, g) deux paramétrages d'une nappe plongée Σ .

Proposition 9

Soient (U, f) et (V, g) deux paramétrages d'une nappe plongée Σ . Soient α_f et α_g les expressions dans ces coordonnées de la première forme fondamentale.

Proposition 9

Soient (U, f) et (V, g) deux paramétrages d'une nappe plongée Σ . Soient α_f et α_g les expressions dans ces coordonnées de la première forme fondamentale. Soit λ la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^2 .

Proposition 9

Soient (U, f) et (V, g) deux paramétrages d'une nappe plongée Σ . Soient α_f et α_g les expressions dans ces coordonnées de la première forme fondamentale. Soit λ la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^2 . Les deux mesures $f_*(\sqrt{\det(\alpha_f)} \lambda)$ et $g_*(\sqrt{\det(\alpha_g)} \lambda)$ sont égales.

Proposition 9

Soient (U, f) et (V, g) deux paramétrages d'une nappe plongée Σ . Soient α_f et α_g les expressions dans ces coordonnées de la première forme fondamentale. Soit λ la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^2 . Les deux mesures $f_*(\sqrt{\det(\alpha_f)} \lambda)$ et $g_*(\sqrt{\det(\alpha_g)} \lambda)$ sont égales.

Preuve : Soit $\phi : U \rightarrow V$ le difféomorphisme tel que $f = g \circ \phi$. D'après la proposition 3, $\alpha_f = {}^t J\phi(\alpha_g \circ \phi)J\phi$, donc $\det(\alpha_f) = (\det(J\phi))^2 \det(\alpha_g) \circ \phi$.

Proposition 9

Soient (U, f) et (V, g) deux paramétrages d'une nappe plongée Σ . Soient α_f et α_g les expressions dans ces coordonnées de la première forme fondamentale. Soit λ la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^2 . Les deux mesures $f_*(\sqrt{\det(\alpha_f)} \lambda)$ et $g_*(\sqrt{\det(\alpha_g)} \lambda)$ sont égales.

Preuve : Soit $\phi : U \rightarrow V$ le difféomorphisme tel que $f = g \circ \phi$. D'après la proposition 3, $\alpha_f = {}^t J\phi(\alpha_g \circ \phi)J\phi$, donc $\det(\alpha_f) = (\det(J\phi))^2 \det(\alpha_g) \circ \phi$. Soit D une partie mesurable de Σ .

$$f_*(\sqrt{\det(\alpha_f)} \lambda)(D) := \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_f)} d\lambda = \int_{\phi^{-1}(g^{-1}(D))} |\det(J\phi)| \sqrt{\det(\alpha_g) \circ \phi} d\lambda.$$

Proposition 9

Soient (U, f) et (V, g) deux paramétrages d'une nappe plongée Σ . Soient α_f et α_g les expressions dans ces coordonnées de la première forme fondamentale. Soit λ la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^2 . Les deux mesures $f_*(\sqrt{\det(\alpha_f)} \lambda)$ et $g_*(\sqrt{\det(\alpha_g)} \lambda)$ sont égales.

Preuve : Soit $\phi : U \rightarrow V$ le difféomorphisme tel que $f = g \circ \phi$. D'après la proposition 3, $\alpha_f = {}^t J\phi(\alpha_g \circ \phi)J\phi$, donc $\det(\alpha_f) = (\det(J\phi))^2 \det(\alpha_g) \circ \phi$. Soit D une partie mesurable de Σ .

$$f_*(\sqrt{\det(\alpha_f)} \lambda)(D) := \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_f)} d\lambda = \int_{\phi^{-1}(g^{-1}(D))} |\det(J\phi)| \sqrt{\det(\alpha_g) \circ \phi} d\lambda.$$

La formule de changement de variable, nous dit par ailleurs que

$$\int_{\phi^{-1}(g^{-1}(D))} |\det(J\phi)| \sqrt{\det(\alpha_g) \circ \phi} d\lambda = \int_{g^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_g)} d\lambda$$

Proposition 9

Soient (U, f) et (V, g) deux paramétrages d'une nappe plongée Σ . Soient α_f et α_g les expressions dans ces coordonnées de la première forme fondamentale. Soit λ la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^2 . Les deux mesures $f_*(\sqrt{\det(\alpha_f)} \lambda)$ et $g_*(\sqrt{\det(\alpha_g)} \lambda)$ sont égales.

Preuve : Soit $\phi : U \rightarrow V$ le difféomorphisme tel que $f = g \circ \phi$. D'après la proposition 3, $\alpha_f = {}^t J\phi(\alpha_g \circ \phi)J\phi$, donc $\det(\alpha_f) = (\det(J\phi))^2 \det(\alpha_g) \circ \phi$. Soit D une partie mesurable de Σ .

$$f_*(\sqrt{\det(\alpha_f)} \lambda)(D) := \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_f)} d\lambda = \int_{\phi^{-1}(g^{-1}(D))} |\det(J\phi)| \sqrt{\det(\alpha_g) \circ \phi} d\lambda.$$

La formule de changement de variable, nous dit par ailleurs que

$$\int_{\phi^{-1}(g^{-1}(D))} |\det(J\phi)| \sqrt{\det(\alpha_g) \circ \phi} d\lambda = \int_{g^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_g)} d\lambda = g_*(\sqrt{\det(\alpha_g)} \lambda)(D). \square$$

On a donc défini une mesure sur Σ indépendamment d'un choix de coordonnées.

On a donc défini une mesure sur Σ indépendamment d'un choix de coordonnées.

Définition 10

Pour toute partie mesurable D de Σ , on définit l'aire de D comme étant $\int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_f)} d\lambda$.

On a donc défini une mesure sur Σ indépendamment d'un choix de coordonnées.

Définition 10

Pour toute partie mesurable D de Σ , on définit l'aire de D comme étant $\int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_f)} d\lambda$.

On voit aussi que l'aire ainsi définie est invariante par isométrie. En effet, si Ψ est une isométrie de \mathbf{R}^3 , alors $\alpha_{\Psi \circ f} = \alpha_f$.

On a donc défini une mesure sur Σ indépendamment d'un choix de coordonnées.

Définition 10

Pour toute partie mesurable D de Σ , on définit l'aire de D comme étant $\int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_f)} d\lambda$.

On voit aussi que l'aire ainsi définie est invariante par isométrie. En effet, si Ψ est une isométrie de \mathbf{R}^3 , alors $\alpha_{\Psi \circ f} = \alpha_f$.

Proposition 11

Si Ψ est une isométrie de \mathbf{R}^3 et D une partie mesurable de Σ alors l'aire de D (vue comme partie de Σ) est égale à l'aire de $\Psi(D)$ (vue comme partie de $\Psi(\Sigma)$).

On veut comparer maintenant notre aire à l'aire usuelle.

On veut comparer maintenant notre aire à l'aire usuelle. On commence par épaissir D grâce à une application de Gauss. Pour tout $t > 0$ on pose

$$V(t) := \{p + s\nu(p), p \in D \subset \Sigma, s \in [0, t]\}.$$

On veut comparer maintenant notre aire à l'aire usuelle. On commence par épaissir D grâce à une application de Gauss. Pour tout $t > 0$ on pose

$$V(t) := \{p + s\nu(p), p \in D \subset \Sigma, s \in [0, t]\}.$$

Si D et t sont petits, $V(t)$ ressemble à un cylindre de base D et de hauteur t .

On veut comparer maintenant notre aire à l'aire usuelle. On commence par épaissir D grâce à une application de Gauss. Pour tout $t > 0$ on pose

$$V(t) := \{p + s\nu(p), p \in D \subset \Sigma, s \in [0, t]\}.$$

Si D et t sont petits, $V(t)$ ressemble à un cylindre de base D et de hauteur t . On devrait donc avoir $\text{vol}(V(t)) \simeq \text{aire}(D) \times t$.

On veut comparer maintenant notre aire à l'aire usuelle. On commence par épaissir D grâce à une application de Gauss. Pour tout $t > 0$ on pose

$$V(t) := \{p + s\nu(p), p \in D \subset \Sigma, s \in [0, t]\}.$$

Si D et t sont petits, $V(t)$ ressemble à un cylindre de base D et de hauteur t . On devrait donc avoir $\text{vol}(V(t)) \simeq \text{aire}(D) \times t$.

On peut voir cette affirmation comme une formulation du fait qu'on peut approximer l'aire d'une surface par la quantité de peinture nécessaire pour la peindre.

Exemple 12

Si D est le parallélogramme de sommets $0, X, Y, X + Y$ (contenu dans la nappe $\text{vect}(X, Y)$) alors $\nu = \frac{X \wedge Y}{\|X \wedge Y\|}$. On sait que

$\text{vol}(V(t)) = |\det(X, Y, t\nu)| = t|\det(X, Y, \nu)| = \text{aire}(D) \cdot t$ et donc l'aire de D est

$|\det(X, Y, \nu)| = \|X \wedge Y\| = (\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$ (vérifier qu'on retrouve l'aire usuelle ie le déterminant de (X, Y) par rapport une base orthonormée de $\text{vect}(X, Y)$). Si on paramètre $\text{vect}(X, Y)$ par $f : (u, v) \mapsto uX + vY$, l'expression de la première forme fondamentale dans ces coordonnées est constante :

$\alpha_f = \begin{pmatrix} \|X\|^2 & \langle X, Y \rangle \\ \langle X, Y \rangle & \|Y\|^2 \end{pmatrix}$. La définition 10 donne

$\text{aire}(D) = \int_{[0,1]^2} (\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2)^{\frac{1}{2}} d\mu$. C'est bien la même chose.

Si l'aire qu'on a défini est bien l'aire usuelle, on devrait avoir, au moins pour D assez petit,

$$\text{aire}(D) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(V(t))}{t}.$$

Si l'aire qu'on a défini est bien l'aire usuelle, on devrait avoir, au moins pour D assez petit,

$$\text{aire}(D) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(V(t))}{t}.$$

On définit $F : U \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbf{R}^3$ par $F(x, s) = f(x) + s N_f(x)$.

Si l'aire qu'on a défini est bien l'aire usuelle, on devrait avoir, au moins pour D assez petit,

$$\text{aire}(D) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(V(t))}{t}.$$

On définit $F : U \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbf{R}^3$ par $F(x, s) = f(x) + s N_f(x)$.

Cette application est lisse et $D_{(x,0)}F(h, k) = D_x f(h) + k N_f(x) + 0$.

Si l'aire qu'on a défini est bien l'aire usuelle, on devrait avoir, au moins pour D assez petit,

$$\text{aire}(D) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(V(t))}{t}.$$

On définit $F : U \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbf{R}^3$ par $F(x, s) = f(x) + s N_f(x)$.

Cette application est lisse et $D_{(x,0)}F(h, k) = D_x f(h) + k N_f(x) + 0$.

On voit que $D_{(x,0)}F$ est toujours inversible !

Si l'aire qu'on a défini est bien l'aire usuelle, on devrait avoir, au moins pour D assez petit,

$$\text{aire}(D) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(V(t))}{t}.$$

On définit $F : U \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbf{R}^3$ par $F(x, s) = f(x) + s N_f(x)$.

Cette application est lisse et $D_{(x,0)}F(h, k) = D_x f(h) + k N_f(x) + 0$.

On voit que $D_{(x,0)}F$ est toujours inversible !

On peut appliquer le théorème d'inversion locale. Quitte à prendre un D plus petit, on peut restreindre U et ε de telle sorte que F soit un difféomorphisme lisse.

Si l'aire qu'on a défini est bien l'aire usuelle, on devrait avoir, au moins pour D assez petit,

$$\text{aire}(D) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(V(t))}{t}.$$

On définit $F : U \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbf{R}^3$ par $F(x, s) = f(x) + s N_f(x)$.

Cette application est lisse et $D_{(x,0)}F(h, k) = D_x f(h) + k N_f(x) + 0$.

On voit que $D_{(x,0)}F$ est toujours inversible !

On peut appliquer le théorème d'inversion locale. Quitte à prendre un D plus petit, on peut restreindre U et ε de telle sorte que F soit un difféomorphisme lisse.

On peut alors appliquer la formule de changement de variables :

$$\text{vol}(V(t)) = \int_{F(\Delta \times [0,t])} dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{\Delta \times [0,t]} |\det D_{(x,s)}F| dx_1 dx_2 ds,$$

ou $\Delta = f^{-1}(D)$.

Comme $D_{(x,s)}F(h, k) = D_x f(h) + kN_f(x) + sD_x N_f(h)$ on a

$$\det D_{(x,s)}F = \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x) \right) + sA(x) + s^2B(x),$$

où A et B sont des termes qu'on ne détaillera pas impliquant des dérivées de N_f .

Comme $D_{(x,s)}F(h, k) = D_x f(h) + kN_f(x) + sD_x N_f(h)$ on a

$$\det D_{(x,s)}F = \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x) \right) + sA(x) + s^2B(x),$$

où A et B sont des termes qu'on ne détaillera pas impliquant des dérivées de N_f .
En intégrant tout d'abord par rapport s (grâce à Fubini), on obtient

$$\text{vol}(V(t)) = t \int_{\Delta} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x) \right) + \frac{t^2}{2}A(x) + \frac{t^3}{3}B(x) \, d\mu(x).$$

Comme $D_{(x,s)}F(h, k) = D_x f(h) + kN_f(x) + sD_x N_f(h)$ on a

$$\det D_{(x,s)}F = \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x) \right) + sA(x) + s^2B(x),$$

où A et B sont des termes qu'on ne détaillera pas impliquant des dérivées de N_f .
En intégrant tout d'abord par rapport s (grâce à Fubini), on obtient

$$\text{vol}(V(t)) = t \int_{\Delta} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x) \right) + \frac{t^2}{2}A(x) + \frac{t^3}{3}B(x) \, d\mu(x).$$

Or $\det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x) \right) = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{\det \alpha_f}$ (montrez le).

Comme $D_{(x,s)}F(h, k) = D_x f(h) + kN_f(x) + sD_x N_f(h)$ on a

$$\det D_{(x,s)}F = \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x) \right) + sA(x) + s^2 B(x),$$

où A et B sont des termes qu'on ne détaillera pas impliquant des dérivées de N_f .
En intégrant tout d'abord par rapport s (grâce à Fubini), on obtient

$$\text{vol}(V(t)) = t \int_{\Delta} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x) \right) + \frac{t^2}{2} A(x) + \frac{t^3}{3} B(x) \, d\mu(x).$$

Or $\det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x) \right) = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{\det \alpha_f}$ (montrez le). D'où

$$\text{Aire}(D) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(t)}{t} = \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det \alpha_f(x)} \, dx. \quad \square$$

Discussion

On peut continuer la discussion sur les bonnes coordonnées. Il est clair que les aires que l'on voit sur une carte correspondent à un facteur près aux aires réelles si et seulement si $\det(\alpha_f)$ est constant.

Discussion

On peut continuer la discussion sur les bonnes coordonnées. Il est clair que les aires que l'on voit sur une carte correspondent à un facteur près aux aires réelles si et seulement si $\det(\alpha_f)$ est constant. Sur les mappemondes habituellement utilisées les aires lues ne correspondent pas aux aires réelles. Souvent le Groenland est de taille comparable à l'Afrique ou à l'Amérique du sud.

Discussion

On peut continuer la discussion sur les bonnes coordonnées. Il est clair que les aires que l'on voit sur une carte correspondent à un facteur près aux aires réelles si et seulement si $\det(\alpha_f)$ est constant. Sur les mappemondes habituellement utilisées les aires lues ne correspondent pas aux aires réelles. Souvent le Groenland est de taille comparable à l'Afrique ou à l'Amérique du sud.

Il est possible de faire des mappemondes sur lesquelles les aires sont correctes, mais si les angles et les aires lues sont justes alors les longueurs le sont ce qui est impossible.

Exercice 3

- ① À l'aide des coordonnées $(\theta, h) \mapsto R(\sqrt{1-h^2} \cos \theta, \sqrt{1-h^2} \sin \theta, h)$ (projection de Lambert) calculer l'aire des sphères (on admettra que S^2 et S^2 privée d'un arc de grand cercle ont même aire). En déduire la formule donnant le volume des boules.
- ② Un triangle sphérique est un triangle tracé sur la sphère unité dont les côtés sont des arcs de grands cercles (ie de centre 0). Montrer qu'un triangle sphérique d'angles a , b et c est d'aire $a + b + c - \pi$.

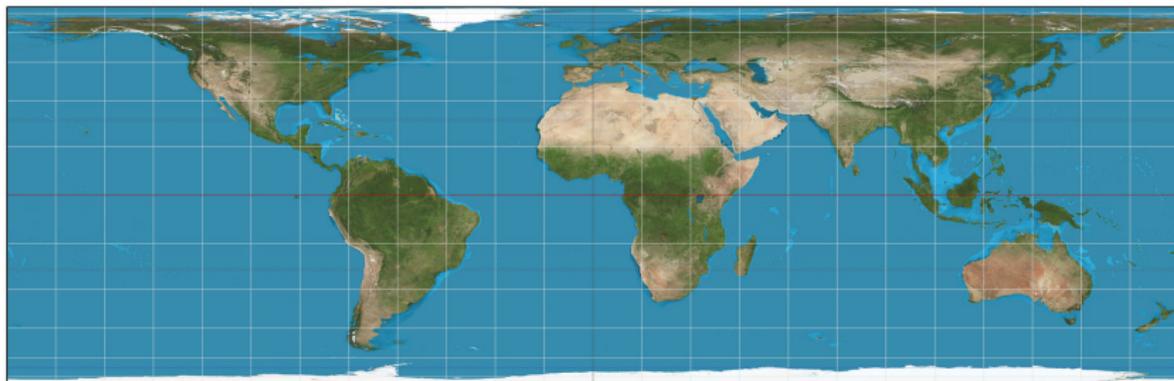


FIGURE – Projection de Lambert (source wikipedia)

Deuxième forme fondamentale

Pour faire comme les grecs, il nous faut faire varier nos mâts. On veut donc dériver l'application de Gauss.

Deuxième forme fondamentale

Pour faire comme les grecs, il nous faut faire varier nos mâts. On veut donc dériver l'application de Gauss.

On a vu dans la preuve de la proposition 2.4.2 que si γ est un arc différentiable à valeurs dans Σ alors $f^{-1} \circ \gamma$ est différentiable.

Deuxième forme fondamentale

Pour faire comme les grecs, il nous faut faire varier nos mâts. On veut donc dériver l'application de Gauss.

On a vu dans la preuve de la proposition 2.4.2 que si γ est un arc différentiable à valeurs dans Σ alors $f^{-1} \circ \gamma$ est différentiable.

On en déduit que *si γ est un arc différentiable à valeurs dans Σ et si ν est une application de Gauss de Σ alors $\nu \circ \gamma$ est une application différentiable.*

Deuxième forme fondamentale

Pour faire comme les grecs, il nous faut faire varier nos mâts. On veut donc dériver l'application de Gauss.

On a vu dans la preuve de la proposition 2.4.2 que si γ est un arc différentiable à valeurs dans Σ alors $f^{-1} \circ \gamma$ est différentiable.

On en déduit que *si γ est un arc différentiable à valeurs dans Σ et si ν est une application de Gauss de Σ alors $\nu \circ \gamma$ est une application différentiable.*

En effet, $\nu \circ \gamma = (\nu \circ f) \circ (f^{-1} \circ \gamma)$ est la composée de deux applications différentiables. Comme il s'agit d'une propriété locale, on voit que cette propriété est encore vraie sur toute surface possédant une application de Gauss.

Définition 13

Soit Σ une nappe orientée, ν l'application de Gauss associée (ou plus généralement une surface munie d'une application de Gauss) et $p \in \Sigma$.

Définition 13

Soit Σ une nappe orientée, ν l'application de Gauss associée (ou plus généralement une surface munie d'une application de Gauss) et $p \in \Sigma$. La différentielle de ν en $p = f(x)$ est l'application linéaire $d_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par

$$d_p\nu(X) = (\nu \circ \gamma)'(0),$$

où γ est un arc différentiable tracé sur Σ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.

Définition 13

Soit Σ une nappe orientée, ν l'application de Gauss associée (ou plus généralement une surface munie d'une application de Gauss) et $p \in \Sigma$. La différentielle de ν en $p = f(x)$ est l'application linéaire $d_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par

$$d_p\nu(X) = (\nu \circ \gamma)'(0),$$

où γ est un arc différentiable tracé sur Σ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.

Pour voir que $d_p\nu(X)$ ne dépend pas du choix de γ , on utilise des coord. (U, f) .

Définition 13

Soit Σ une nappe orientée, ν l'application de Gauss associée (ou plus généralement une surface munie d'une application de Gauss) et $p \in \Sigma$. La différentielle de ν en $p = f(x)$ est l'application linéaire $d_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par

$$d_p\nu(X) = (\nu \circ \gamma)'(0),$$

où γ est un arc différentiable tracé sur Σ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.

Pour voir que $d_p\nu(X)$ ne dépend pas du choix de γ , on utilise des coord. (U, f) . On a vu que $\nu \circ \gamma = N_f \circ (f^{-1} \circ \gamma)$.

Définition 13

Soit Σ une nappe orientée, ν l'application de Gauss associée (ou plus généralement une surface munie d'une application de Gauss) et $p \in \Sigma$. La différentielle de ν en $p = f(x)$ est l'application linéaire $d_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par

$$d_p\nu(X) = (\nu \circ \gamma)'(0),$$

où γ est un arc différentiable tracé sur Σ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.

Pour voir que $d_p\nu(X)$ ne dépend pas du choix de γ , on utilise des coord. (U, f) . On a vu que $\nu \circ \gamma = N_f \circ (f^{-1} \circ \gamma)$.

Par ailleurs $D_x f (f^{-1} \circ \gamma)'(0) = X$, ce qui signifie que $(f^{-1} \circ \gamma)'(0) = [D_x f]^{-1}(X)$ (on voit $D_x f$ comme une application valeurs dans $T_p\Sigma$).

Définition 13

Soit Σ une nappe orientée, ν l'application de Gauss associée (ou plus généralement une surface munie d'une application de Gauss) et $p \in \Sigma$. La différentielle de ν en $p = f(x)$ est l'application linéaire $d_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par

$$d_p\nu(X) = (\nu \circ \gamma)'(0),$$

où γ est un arc différentiable tracé sur Σ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.

Pour voir que $d_p\nu(X)$ ne dépend pas du choix de γ , on utilise des coord. (U, f) . On a vu que $\nu \circ \gamma = N_f \circ (f^{-1} \circ \gamma)$.

Par ailleurs $D_x f (f^{-1} \circ \gamma)'(0) = X$, ce qui signifie que $(f^{-1} \circ \gamma)'(0) = [D_x f]^{-1}(X)$ (on voit $D_x f$ comme une application valeurs dans $T_p\Sigma$). On voit donc que

$$d_p\nu(X) = D_x N_f \cdot [D_x f]^{-1}(X).$$

Toute mention à γ à disparu.

Définition 13

Soit Σ une nappe orientée, ν l'application de Gauss associée (ou plus généralement une surface munie d'une application de Gauss) et $p \in \Sigma$. La différentielle de ν en $p = f(x)$ est l'application linéaire $d_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par

$$d_p\nu(X) = (\nu \circ \gamma)'(0),$$

où γ est un arc différentiable tracé sur Σ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.

Pour voir que $d_p\nu(X)$ ne dépend pas du choix de γ , on utilise des coord. (U, f) . On a vu que $\nu \circ \gamma = N_f \circ (f^{-1} \circ \gamma)$.

Par ailleurs $D_x f (f^{-1} \circ \gamma)'(0) = X$, ce qui signifie que $(f^{-1} \circ \gamma)'(0) = [D_x f]^{-1}(X)$ (on voit $D_x f$ comme une application valeurs dans $T_p\Sigma$). On voit donc que

$$d_p\nu(X) = D_x N_f \cdot [D_x f]^{-1}(X).$$

Toute mention à γ à disparu.

Remarquons qu'on a aussi montré que l'expression $DN_f(x) \cdot [D_x f]^{-1}(X)$ ne dépend pas du choix de (U, f) .

Proposition 14

La différentielle de l'application de Gauss de Σ en p est un endomorphisme de $T_p\Sigma$ (autrement dit $d_p\nu(T_p\Sigma) \subset T_p\Sigma$).

Proposition 14

La différentielle de l'application de Gauss de Σ en p est un endomorphisme de $T_p\Sigma$ (autrement dit $d_p\nu(T_p\Sigma) \subset T_p\Sigma$).

Cet endomorphisme est symétrique c'est-à-dire

$$\forall (X, Y) \in T_p\Sigma^2, \langle d_p\nu(X), Y \rangle = \langle X, d_p\nu(Y) \rangle.$$

Proposition 14

La différentielle de l'application de Gauss de Σ en p est un endomorphisme de $T_p\Sigma$ (autrement dit $d_p\nu(T_p\Sigma) \subset T_p\Sigma$).

Cet endomorphisme est symétrique c'est-à-dire

$$\forall (X, Y) \in T_p\Sigma^2, \langle d_p\nu(X), Y \rangle = \langle X, d_p\nu(Y) \rangle.$$

Preuve : On choisit des coordonnées (U, f) et on définit N_f comme précédemment.

Proposition 14

La différentielle de l'application de Gauss de Σ en p est un endomorphisme de $T_p\Sigma$ (autrement dit $d_p\nu(T_p\Sigma) \subset T_p\Sigma$).

Cet endomorphisme est symétrique c'est-à-dire

$$\forall (X, Y) \in T_p\Sigma^2, \langle d_p\nu(X), Y \rangle = \langle X, d_p\nu(Y) \rangle.$$

Preuve : On choisit des coordonnées (U, f) et on définit N_f comme précédemment.

Soit $X \in T_p\Sigma$ et $\xi = [D_x f]^{-1}(X) \in \mathbf{R}^2$.

Proposition 14

La différentielle de l'application de Gauss de Σ en p est un endomorphisme de $T_p\Sigma$ (autrement dit $d_p\nu(T_p\Sigma) \subset T_p\Sigma$).

Cet endomorphisme est symétrique c'est-à-dire

$$\forall (X, Y) \in T_p\Sigma^2, \langle d_p\nu(X), Y \rangle = \langle X, d_p\nu(Y) \rangle.$$

Preuve : On choisit des coordonnées (U, f) et on définit N_f comme précédemment.

Soit $X \in T_p\Sigma$ et $\xi = [D_x f]^{-1}(X) \in \mathbf{R}^2$.

Par définition $d_p\nu(X) = \frac{d}{dt} N_f(x + t\xi)|_{t=0}$.

Proposition 14

La différentielle de l'application de Gauss de Σ en p est un endomorphisme de $T_p\Sigma$ (autrement dit $d_p\nu(T_p\Sigma) \subset T_p\Sigma$).

Cet endomorphisme est symétrique c'est-à-dire

$$\forall (X, Y) \in T_p\Sigma^2, \langle d_p\nu(X), Y \rangle = \langle X, d_p\nu(Y) \rangle.$$

Preuve : On choisit des coordonnées (U, f) et on définit N_f comme précédemment.

Soit $X \in T_p\Sigma$ et $\xi = [D_x f]^{-1}(X) \in \mathbf{R}^2$.

Par définition $d_p\nu(X) = \frac{d}{dt} N_f(x + t\xi)|_{t=0}$. On reconnaît la dérivée d'un arc lisse tracé sur S^2 ,

Proposition 14

La différentielle de l'application de Gauss de Σ en p est un endomorphisme de $T_p\Sigma$ (autrement dit $d_p\nu(T_p\Sigma) \subset T_p\Sigma$).

Cet endomorphisme est symétrique c'est-à-dire

$$\forall (X, Y) \in T_p\Sigma^2, \langle d_p\nu(X), Y \rangle = \langle X, d_p\nu(Y) \rangle.$$

Preuve : On choisit des coordonnées (U, f) et on définit N_f comme précédemment.

Soit $X \in T_p\Sigma$ et $\xi = [D_x f]^{-1}(X) \in \mathbf{R}^2$.

Par définition $d_p\nu(X) = \frac{d}{dt} N_f(x + t\xi)|_{t=0}$. On reconnaît la dérivée d'un arc lisse tracé sur S^2 , donc $D_x N_f(\xi) \in T_{\nu(p)}S^2$.

Proposition 14

La différentielle de l'application de Gauss de Σ en p est un endomorphisme de $T_p\Sigma$ (autrement dit $d_p\nu(T_p\Sigma) \subset T_p\Sigma$).

Cet endomorphisme est symétrique c'est-à-dire

$$\forall (X, Y) \in T_p\Sigma^2, \langle d_p\nu(X), Y \rangle = \langle X, d_p\nu(Y) \rangle.$$

Preuve : On choisit des coordonnées (U, f) et on définit N_f comme précédemment.

Soit $X \in T_p\Sigma$ et $\xi = [D_x f]^{-1}(X) \in \mathbf{R}^2$.

Par définition $d_p\nu(X) = \frac{d}{dt} N_f(x + t\xi)|_{t=0}$. On reconnaît la dérivée d'un arc lisse tracé sur S^2 , donc $D_x N_f(\xi) \in T_{\nu(p)}S^2$.

Mais $T_{\nu(p)}S^2 = \nu(p)^\perp = T_p\Sigma$. Ce qui montre le premier point.

Pour montrer le deuxième point, il suffit de montrer que

$$\left\langle d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) \right\rangle.$$

Pour montrer le deuxième point, il suffit de montrer que

$$\left\langle d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) \right\rangle.$$

Par définition $d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) = \frac{\partial N_f}{\partial x_1}(x)$

Pour montrer le deuxième point, il suffit de montrer que

$$\left\langle d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) \right\rangle.$$

Par définition $d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) = \frac{\partial N_f}{\partial x_1}(x)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \in T_{f(x)}\Sigma$ on a aussi $\left\langle N_f(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = 0$.

Pour montrer le deuxième point, il suffit de montrer que

$$\left\langle d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) \right\rangle.$$

Par définition $d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) = \frac{\partial N_f}{\partial x_1}(x)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \in T_{f(x)}\Sigma$ on a aussi $\left\langle N_f(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = 0$. En dérivant cette égalité, on a

$$\left\langle \frac{\partial N_f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle + \left\langle N_f, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle = 0.$$

Pour montrer le deuxième point, il suffit de montrer que

$$\left\langle d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) \right\rangle.$$

Par définition $d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) = \frac{\partial N_f}{\partial x_1}(x)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \in T_{f(x)}\Sigma$ on a aussi $\left\langle N_f(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = 0$. En dérivant cette égalité, on a

$$\left\langle \frac{\partial N_f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle + \left\langle N_f, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle = 0.$$

D'après le théorème de Schwarz le terme de droite est symétrique, il en est donc de même de celui de gauche.

Pour montrer le deuxième point, il suffit de montrer que

$$\left\langle d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) \right\rangle.$$

Par définition $d_{f(x)}\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) = \frac{\partial N_f}{\partial x_1}(x)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \in T_{f(x)}\Sigma$ on a aussi $\left\langle N_f(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = 0$. En dérivant cette égalité, on a

$$\left\langle \frac{\partial N_f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle + \left\langle N_f, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle = 0.$$

D'après le théorème de Schwarz le terme de droite est symétrique, il en est donc de même de celui de gauche. \square

Définition 15

On appelle endomorphisme de Weingarten (de Σ en p), l'endomorphisme symétrique

$$W_p = -d_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$$

(on fera attention au signe moins)

Définition 15

On appelle endomorphisme de Weingarten (de Σ en p), l'endomorphisme symétrique

$$W_p = -d_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$$

(on fera attention au signe moins) et seconde forme fondamentale (de Σ en p) la forme bilinéaire symétrique définie par

$$II_p(X, Y) := -\langle d_p\nu(X), Y \rangle = \langle W_p(X), Y \rangle.$$

Définition 15

On appelle endomorphisme de Weingarten (de Σ en p), l'endomorphisme symétrique

$$W_p = -d_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$$

(on fera attention au signe moins) et seconde forme fondamentale (de Σ en p) la forme bilinéaire symétrique définie par

$$II_p(X, Y) := -\langle d_p\nu(X), Y \rangle = \langle W_p(X), Y \rangle.$$

Remarque

Le fait que l'endomorphisme de Weingarten est symétrique ne signifie pas que sa matrice dans une base quelconque est symétrique (seule son écriture dans une base orthonormale l'est). Par contre, il est bien diagonalisable.

Exemple 16

Si Σ est la sphère S^2 alors $\nu = \pm \text{id}$ selon le choix de ν (rentrant ou sortant). Pour tout arc $\gamma : I \rightarrow S^2$ on a $\nu \circ \gamma = \pm \gamma$ et donc pour tout $p \in S^2$, $d_p \nu = \pm \text{Id}$.

Exemple 16

Si Σ est la sphère S^2 alors $\nu = \pm \text{id}$ selon le choix de ν (rentrant ou sortant). Pour tout arc $\gamma : I \rightarrow S^2$ on a $\nu \circ \gamma = \pm \gamma$ et donc pour tout $p \in S^2$, $d_p \nu = \pm \text{Id}$.

Soient \mathcal{C} le cylindre droit défini à l'exercice 2 et (U, g) le paramétrage de \mathcal{C} défini alors.

Exemple 16

Si Σ est la sphère S^2 alors $\nu = \pm \text{id}$ selon le choix de ν (rentrant ou sortant). Pour tout arc $\gamma : I \rightarrow S^2$ on a $\nu \circ \gamma = \pm \gamma$ et donc pour tout $p \in S^2$, $d_p \nu = \pm \text{Id}$.

Soient \mathcal{C} le cylindre droit défini à l'exercice 2 et (U, g) le paramétrage de \mathcal{C} défini alors. Si on a fait l'exercice 2, on a trouvé $\nu \circ g(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, 0)$.

Exemple 16

Si Σ est la sphère S^2 alors $\nu = \pm \text{id}$ selon le choix de ν (rentrant ou sortant). Pour tout arc $\gamma : I \rightarrow S^2$ on a $\nu \circ \gamma = \pm \gamma$ et donc pour tout $p \in S^2$, $d_p \nu = \pm \text{Id}$.

Soient \mathcal{C} le cylindre droit défini à l'exercice 2 et (U, g) le paramétrage de \mathcal{C} défini alors. Si on a fait l'exercice 2, on a trouvé $\nu \circ g(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, 0)$. On a donc

$$J_x(\nu \circ g) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 & 0 \\ \cos x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 16

Si Σ est la sphère S^2 alors $\nu = \pm \text{id}$ selon le choix de ν (rentrant ou sortant). Pour tout arc $\gamma : I \rightarrow S^2$ on a $\nu \circ \gamma = \pm \gamma$ et donc pour tout $p \in S^2$, $d_p \nu = \pm \text{Id}$.

Soient \mathcal{C} le cylindre droit défini à l'exercice 2 et (U, g) le paramétrage de \mathcal{C} défini alors. Si on a fait l'exercice 2, on a trouvé $\nu \circ g(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, 0)$. On a donc

$$J_x(\nu \circ g) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 & 0 \\ \cos x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$d_{g(x)} \nu \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \text{ et } d_{g(x)} \nu \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = 0.$$

Exemple 16

Si Σ est la sphère S^2 alors $\nu = \pm \text{id}$ selon le choix de ν (rentrant ou sortant). Pour tout arc $\gamma : I \rightarrow S^2$ on a $\nu \circ \gamma = \pm \gamma$ et donc pour tout $p \in S^2$, $d_p \nu = \pm \text{Id}$.

Soient \mathcal{C} le cylindre droit défini à l'exercice 2 et (U, g) le paramétrage de \mathcal{C} défini alors. Si on a fait l'exercice 2, on a trouvé $\nu \circ g(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, 0)$. On a donc

$$J_x(\nu \circ g) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 & 0 \\ \cos x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$d_{g(x)} \nu \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \text{ et } d_{g(x)} \nu \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = 0.$$

Ainsi la matrice de $d_{g(x)} \nu$ dans la base $(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x))$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Une interprétation géométrique de $II_p(X, X)$ (et du signe $-$) :

Une interprétation géométrique de $II_p(X, X)$ (et du signe $-$) :

Proposition 17

Soient $p \in \Sigma$, (I, γ) un arc différentiable tracé sur Σ . Soit $p = \gamma(0)$ et $X = \gamma'(0)$.
Alors

$$\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle d_p \nu(X), X \rangle = II_p(X, X).$$

Une interprétation géométrique de $II_p(X, X)$ (et du signe $-$) :

Proposition 17

Soient $p \in \Sigma$, (I, γ) un arc différentiable tracé sur Σ . Soit $p = \gamma(0)$ et $X = \gamma'(0)$.
Alors

$$\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle d_p \nu(X), X \rangle = II_p(X, X).$$

Preuve : Pour tout $t \in I$, on a $\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$.

Une interprétation géométrique de $II_p(X, X)$ (et du signe $-$) :

Proposition 17

Soient $p \in \Sigma$, (I, γ) un arc différentiable tracé sur Σ . Soit $p = \gamma(0)$ et $X = \gamma'(0)$.
Alors

$$\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle d_p \nu(X), X \rangle = II_p(X, X).$$

Preuve : Pour tout $t \in I$, on a $\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$. Ce qui donne en dérivant,
 $\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle \gamma'(0), (\nu \circ \gamma)'(0) \rangle$

Une interprétation géométrique de $II_p(X, X)$ (et du signe $-$) :

Proposition 17

Soient $p \in \Sigma$, (I, γ) un arc différentiable tracé sur Σ . Soit $p = \gamma(0)$ et $X = \gamma'(0)$.
Alors

$$\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle d_p \nu(X), X \rangle = II_p(X, X).$$

Preuve : Pour tout $t \in I$, on a $\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$. Ce qui donne en dérivant,
 $\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle \gamma'(0), (\nu \circ \gamma)'(0) \rangle = -\langle \gamma'(0), d_p \nu \cdot \gamma'(0) \rangle$. \square

Une interprétation géométrique de $II_p(X, X)$ (et du signe $-$) :

Proposition 17

Soient $p \in \Sigma$, (I, γ) un arc différentiable tracé sur Σ . Soit $p = \gamma(0)$ et $X = \gamma'(0)$. Alors

$$\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle d_p \nu(X), X \rangle = II_p(X, X).$$

Preuve : Pour tout $t \in I$, on a $\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$. Ce qui donne en dérivant, $\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle \gamma'(0), (\nu \circ \gamma)'(0) \rangle = -\langle \gamma'(0), d_p \nu \cdot \gamma'(0) \rangle$. \square

On rappelle que $\langle \gamma''(0), \nu \rangle \nu$ est la projection orthogonale de l'accélération sur la normale à $T_p \Sigma$.

Une interprétation géométrique de $II_p(X, X)$ (et du signe $-$) :

Proposition 17

Soient $p \in \Sigma$, (I, γ) un arc différentiable tracé sur Σ . Soit $p = \gamma(0)$ et $X = \gamma'(0)$. Alors

$$\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle d_p \nu(X), X \rangle = II_p(X, X).$$

Preuve : Pour tout $t \in I$, on a $\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$. Ce qui donne en dérivant, $\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle \gamma'(0), (\nu \circ \gamma)'(0) \rangle = -\langle \gamma'(0), d_p \nu \cdot \gamma'(0) \rangle$. \square

On rappelle que $\langle \gamma''(0), \nu \rangle \nu$ est la projection orthogonale de l'accélération sur la normale à $T_p \Sigma$. Si on note $\gamma''(0)^T$ la partie tangentielle, on a donc

$$\gamma''(0) = \langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle \nu(p) + \gamma''(0)^T.$$

Une interprétation géométrique de $II_p(X, X)$ (et du signe $-$) :

Proposition 17

Soient $p \in \Sigma$, (I, γ) un arc différentiable tracé sur Σ . Soit $p = \gamma(0)$ et $X = \gamma'(0)$. Alors

$$\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle d_p \nu(X), X \rangle = II_p(X, X).$$

Preuve : Pour tout $t \in I$, on a $\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$. Ce qui donne en dérivant, $\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle \gamma'(0), (\nu \circ \gamma)'(0) \rangle = -\langle \gamma'(0), d_p \nu \cdot \gamma'(0) \rangle$. \square

On rappelle que $\langle \gamma''(0), \nu \rangle \nu$ est la projection orthogonale de l'accélération sur la normale à $T_p \Sigma$. Si on note $\gamma''(0)^T$ la partie tangentielle, on a donc

$$\gamma''(0) = \langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle \nu(p) + \gamma''(0)^T.$$

La proposition 17 nous dit que $\langle \gamma''(0), \nu \rangle$ ne dépend que de $\gamma'(0)$. C'est la partie de l'accélération qui permet à γ de rester dans Σ .

Une interprétation géométrique de $II_p(X, X)$ (et du signe $-$) :

Proposition 17

Soient $p \in \Sigma$, (I, γ) un arc différentiable tracé sur Σ . Soit $p = \gamma(0)$ et $X = \gamma'(0)$. Alors

$$\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle d_p \nu(X), X \rangle = II_p(X, X).$$

Preuve : Pour tout $t \in I$, on a $\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$. Ce qui donne en dérivant, $\langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle = -\langle \gamma'(0), (\nu \circ \gamma)'(0) \rangle = -\langle \gamma'(0), d_p \nu \cdot \gamma'(0) \rangle$. \square

On rappelle que $\langle \gamma''(0), \nu \rangle \nu$ est la projection orthogonale de l'accélération sur la normale à $T_p \Sigma$. Si on note $\gamma''(0)^T$ la partie tangentielle, on a donc

$$\gamma''(0) = \langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle \nu(p) + \gamma''(0)^T.$$

La proposition 17 nous dit que $\langle \gamma''(0), \nu \rangle$ ne dépend que de $\gamma'(0)$. C'est la partie de l'accélération qui permet à γ de rester dans Σ . Ainsi ce nombre décrit Σ .

Il nous dit aussi comment se situe γ par rapport au plan (affine) tangent.

Il nous dit aussi comment se situe γ par rapport au plan (affine) tangent. En effet,

$$\gamma(t) = \underbrace{[p + tX + t^2/2\gamma''(0)^T]}_{\in T_p^A\Sigma} + t^2/2 II(X, X)\nu(p) + o(t^2).$$

Il nous dit aussi comment se situe γ par rapport au plan (affine) tangent. En effet,

$$\gamma(t) = \underbrace{[p + tX + t^2/2\gamma''(0)^T]}_{\in T_p^A\Sigma} + t^2/2 II(X, X)\nu(p) + o(t^2).$$

On voit qu'au voisinage de 0, la courbe est dans le demi-espace délimité par $T_p^A\Sigma$ contenant $p + \nu(p)$ si $II(X, X) > 0$ dans celui contenant $p - \nu(p)$ si $II(X, X) < 0$.

Il nous dit aussi comment se situe γ par rapport au plan (affine) tangent. En effet,

$$\gamma(t) = \underbrace{[p + tX + t^2/2\gamma''(0)^T]}_{\in T_p^A\Sigma} + t^2/2 \, II(X, X)\nu(p) + o(t^2).$$

On voit qu'au voisinage de 0, la courbe est dans le demi-espace délimité par $T_p^A\Sigma$ contenant $p + \nu(p)$ si $II(X, X) > 0$ dans celui contenant $p - \nu(p)$ si $II(X, X) < 0$. On ne peut rien dire si $II(X, X) = 0$.

Il nous dit aussi comment se situe γ par rapport au plan (affine) tangent. En effet,

$$\gamma(t) = \underbrace{[p + tX + t^2/2\gamma''(0)^T]}_{\in T_p^A\Sigma} + t^2/2 \, II(X, X)\nu(p) + o(t^2).$$

On voit qu'au voisinage de 0, la courbe est dans le demi-espace délimité par $T_p^A\Sigma$ contenant $p + \nu(p)$ si $II(X, X) > 0$ dans celui contenant $p - \nu(p)$ si $II(X, X) < 0$. On ne peut rien dire si $II(X, X) = 0$.

On peut écrire $\gamma = p + \gamma_0 + h\nu(p)$ avec γ_0 à valeurs dans $T_p\Sigma$ et h (comme hauteur) à valeurs dans \mathbf{R} .

Il nous dit aussi comment se situe γ par rapport au plan (affine) tangent. En effet,

$$\gamma(t) = \underbrace{[p + tX + t^2/2\gamma''(0)^T]}_{\in T_p^A\Sigma} + t^2/2 \text{II}(X, X)\nu(p) + o(t^2).$$

On voit qu'au voisinage de 0, la courbe est dans le demi-espace délimité par $T_p^A\Sigma$ contenant $p + \nu(p)$ si $\text{II}(X, X) > 0$ dans celui contenant $p - \nu(p)$ si $\text{II}(X, X) < 0$. On ne peut rien dire si $\text{II}(X, X) = 0$.

On peut écrire $\gamma = p + \gamma_0 + h\nu(p)$ avec γ_0 à valeurs dans $T_p\Sigma$ et h (comme hauteur) à valeurs dans \mathbf{R} . En comparant les développements limités on voit que $\text{II}_p(X, X) = h''(0)$ et que $h'(0) = 0$. On en déduit :

Il nous dit aussi comment se situe γ par rapport au plan (affine) tangent. En effet,

$$\gamma(t) = \underbrace{[p + tX + t^2/2\gamma''(0)^T]}_{\in T_p^A\Sigma} + t^2/2 \text{II}(X, X)\nu(p) + o(t^2).$$

On voit qu'au voisinage de 0, la courbe est dans le demi-espace délimité par $T_p^A\Sigma$ contenant $p + \nu(p)$ si $\text{II}(X, X) > 0$ dans celui contenant $p - \nu(p)$ si $\text{II}(X, X) < 0$. On ne peut rien dire si $\text{II}(X, X) = 0$.

On peut écrire $\gamma = p + \gamma_0 + h\nu(p)$ avec γ_0 à valeurs dans $T_p\Sigma$ et h (comme hauteur) à valeurs dans \mathbf{R} . En comparant les développements limités on voit que $\text{II}_p(X, X) = h''(0)$ et que $h'(0) = 0$. On en déduit :

Fait 18

Soit Σ le graphe de $f_0 : \mathbf{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbf{R}$ lisse. Si $a \in U$ est tel que $D_a f = 0$, alors en $p = (a, f_0(a))$, on a

$$\text{II}_p = D_a^2 f_0.$$

où $D_a^2 f_0$ est la différentielle seconde de f_0 .

Définition 19

On appelle courbure de Gauss de Σ au point p le déterminant de l'endomorphisme de Weingarten. On la note $K_{\Sigma}(p)$.

Définition 19

On appelle courbure de Gauss de Σ au point p le déterminant de l'endomorphisme de Weingarten. On la note $K_\Sigma(p)$.

Exemple 20

Il découle de 16 que la courbure de la sphère unité est égale à 1 et que celle du cylindre est nulle (on dit que le cylindre est plat). Quelle est la courbure d'une sphère de rayon $R > 0$?

Définition 19

On appelle courbure de Gauss de Σ au point p le déterminant de l'endomorphisme de Weingarten. On la note $K_{\Sigma}(p)$.

Exemple 20

Il découle de 16 que la courbure de la sphère unité est égale à 1 et que celle du cylindre est nulle (on dit que le cylindre est plat). Quelle est la courbure d'une sphère de rayon $R > 0$?

Remarque

L'endomorphisme W_p dépend du choix d'une orientation, mais pas son déterminant. Le signe de la courbure ne dépend pas du choix d'une orientation.

Définition 19

On appelle courbure de Gauss de Σ au point p le déterminant de l'endomorphisme de Weingarten. On la note $K_{\Sigma}(p)$.

Exemple 20

Il découle de 16 que la courbure de la sphère unité est égale à 1 et que celle du cylindre est nulle (on dit que le cylindre est plat). Quelle est la courbure d'une sphère de rayon $R > 0$?

Remarque

L'endomorphisme W_p dépend du choix d'une orientation, mais pas son déterminant. Le signe de la courbure ne dépend pas du choix d'une orientation.

On déduit de l'exercice ?? que pour toute isométrie Ψ de \mathbf{R}^3 , $W_p^{\Sigma} = \pm W_{\Psi(p)}^{\Psi(\Sigma)}$ et $K_{\Psi(\Sigma)}(\Psi(p)) = K_{\Sigma}(p)$.

Exercice 4

Montrer que les valeurs propres de W_p sont les valeurs extrémales de l'application $X \mapsto II_p(X, X)$ restreinte aux vecteurs $X \in T_p\Sigma$ tels que $\|X\| = 1$.

Exercice 4

Montrer que les valeurs propres de W_p sont les valeurs extrémales de l'application $X \mapsto II_p(X, X)$ restreinte aux vecteurs $X \in T_p\Sigma$ tels que $\|X\| = 1$.

Elles correspondent donc aux directions (appelées *directions principales*) dans lesquelles la surface se courbe le plus. On les appelle les *courbures principales*.

Exercice 4

Montrer que les valeurs propres de W_p sont les valeurs extrémales de l'application $X \mapsto II_p(X, X)$ restreinte aux vecteurs $X \in T_p\Sigma$ tels que $\|X\| = 1$.

Elles correspondent donc aux directions (appelées *directions principales*) dans lesquelles la surface se courbe le plus. On les appelle les *courbures principales*.

On remarque que le signe de la courbure nous dit si les deux courbures principales sont de même signe, autrement dit si les courbes correspondantes sont du même côté du plan tangent.

Proposition 21

Soit p un point p de Σ (ici Σ est une sous-variété).

Proposition 21

Soit p un point p de Σ (ici Σ est une sous-variété).

Si $K_{\Sigma}(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage Ω de p tel que

$$\Omega \cap M \cap T_p^{\perp} M = \{p\}.$$

Proposition 21

Soit p un point p de Σ (ici Σ est une sous-variété).

Si $K_{\Sigma}(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage Ω de p tel que

$$\Omega \cap M \cap T_p^{\perp} M = \{p\}.$$

Si $K_{\Sigma}(p) < 0$ alors pour tout voisinage Ω de p il existe des points de $\Omega \cap M$ situés de part et d'autre de $T_p M$.

Proposition 21

Soit p un point p de Σ (ici Σ est une sous-variété).

Si $K_\Sigma(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage Ω de p tel que

$$\Omega \cap M \cap T_p^\perp M = \{p\}.$$

Si $K_\Sigma(p) < 0$ alors pour tout voisinage Ω de p il existe des points de $\Omega \cap M$ situés de part et d'autre de $T_p M$.

Preuve : Le problème étant invariant par isométrie affine, on peut supposer que $p = 0$ et $T_p \Sigma$ est le plan horizontal $\{x_3 = 0\}$.

Proposition 21

Soit p un point p de Σ (ici Σ est une sous-variété).

Si $K_\Sigma(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage Ω de p tel que

$$\Omega \cap M \cap T_p^\perp M = \{p\}.$$

Si $K_\Sigma(p) < 0$ alors pour tout voisinage Ω de p il existe des points de $\Omega \cap M$ situés de part et d'autre de $T_p M$.

Preuve : Le problème étant invariant par isométrie affine, on peut supposer que $p = 0$ et $T_p \Sigma$ est le plan horizontal $\{x_3 = 0\}$. D'après le théorème des sous-variétés, il existe une fonction f_0 telle qu'au voisinage de p la nappe Σ est le graphe de f_0 .

Proposition 21

Soit p un point p de Σ (ici Σ est une sous-variété).

Si $K_\Sigma(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage Ω de p tel que

$$\Omega \cap M \cap T_p^A M = \{p\}.$$

Si $K_\Sigma(p) < 0$ alors pour tout voisinage Ω de p il existe des points de $\Omega \cap M$ situés de part et d'autre de $T_A M$.

Preuve : Le problème étant invariant par isométrie affine, on peut supposer que $p = 0$ et $T_p \Sigma$ est le plan horizontal $\{x_3 = 0\}$. D'après le théorème des sous-variétés, il existe une fonction f_0 telle qu'au voisinage de p la nappe Σ est le graphe de f_0 . Le plan tangent en p étant horizontal on a $D_0 f_0 = 0$. D'après le fait 18 $II_p(0) = D_0^2 f_0$.

Proposition 21

Soit p un point p de Σ (ici Σ est une sous-variété).

Si $K_\Sigma(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage Ω de p tel que

$$\Omega \cap M \cap T_p^A M = \{p\}.$$

Si $K_\Sigma(p) < 0$ alors pour tout voisinage Ω de p il existe des points de $\Omega \cap M$ situés de part et d'autre de $T_A M$.

Preuve : Le problème étant invariant par isométrie affine, on peut supposer que $p = 0$ et $T_p \Sigma$ est le plan horizontal $\{x_3 = 0\}$. D'après le théorème des sous-variétés, il existe une fonction f_0 telle qu'au voisinage de p la nappe Σ est le graphe de f_0 . Le plan tangent en p étant horizontal on a $D_0 f_0 = 0$. D'après le fait 18 $II_p(0) = D_0^2 f_0$. On écrit le développement limité de f_0 , il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que

$$f_0(x) = D_0^2 f(x, x) + \|x\|^2 \varepsilon(x).$$

Proposition 21

Soit p un point p de Σ (ici Σ est une sous-variété).

Si $K_{\Sigma}(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage Ω de p tel que

$$\Omega \cap M \cap T_p^A M = \{p\}.$$

Si $K_{\Sigma}(p) < 0$ alors pour tout voisinage Ω de p il existe des points de $\Omega \cap M$ situés de part et d'autre de $T_A M$.

Preuve : Le problème étant invariant par isométrie affine, on peut supposer que $p = 0$ et $T_p \Sigma$ est le plan horizontal $\{x_3 = 0\}$. D'après le théorème des sous-variétés, il existe une fonction f_0 telle qu'au voisinage de p la nappe Σ est le graphe de f_0 . Le plan tangent en p étant horizontal on a $D_0 f_0 = 0$. D'après le fait 18 $II_p(0) = D_0^2 f_0$. On écrit le développement limité de f_0 , il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que

$$f_0(x) = D_0^2 f(x, x) + \|x\|^2 \varepsilon(x).$$

Le déterminant de la hessienne est égal à $K(0)$. Si $K(0) > 0$ alors la hessienne est définie positive ou négative la fonction f_0 à un extremum local en 0.

Proposition 21

Soit p un point p de Σ (ici Σ est une sous-variété).

Si $K_{\Sigma}(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage Ω de p tel que

$$\Omega \cap M \cap T_p^A M = \{p\}.$$

Si $K_{\Sigma}(p) < 0$ alors pour tout voisinage Ω de p il existe des points de $\Omega \cap M$ situés de part et d'autre de $T_A M$.

Preuve : Le problème étant invariant par isométrie affine, on peut supposer que $p = 0$ et $T_p \Sigma$ est le plan horizontal $\{x_3 = 0\}$. D'après le théorème des sous-variétés, il existe une fonction f_0 telle qu'au voisinage de p la nappe Σ est le graphe de f_0 . Le plan tangent en p étant horizontal on a $D_0 f_0 = 0$. D'après le fait 18 $II_p(0) = D_0^2 f_0$. On écrit le développement limité de f_0 , il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que

$$f_0(x) = D_0^2 f(x, x) + \|x\|^2 \varepsilon(x).$$

Le déterminant de la hessienne est égal à $K(0)$. Si $K(0) > 0$ alors la hessienne est définie positive ou négative la fonction f_0 à un extremum local en 0. Si $K(0) < 0$ alors la hessienne est de signature $(1, 1)$ et 0 n'est pas un extremum local. \square

Proposition 21

Soit p un point p de Σ (ici Σ est une sous-variété).

Si $K_{\Sigma}(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage Ω de p tel que

$$\Omega \cap M \cap T_p^A M = \{p\}.$$

Si $K_{\Sigma}(p) < 0$ alors pour tout voisinage Ω de p il existe des points de $\Omega \cap M$ situés de part et d'autre de $T_A M$.

Preuve : Le problème étant invariant par isométrie affine, on peut supposer que $p = 0$ et $T_p \Sigma$ est le plan horizontal $\{x_3 = 0\}$. D'après le théorème des sous-variétés, il existe une fonction f_0 telle qu'au voisinage de p la nappe Σ est le graphe de f_0 . Le plan tangent en p étant horizontal on a $D_0 f_0 = 0$. D'après le fait 18 $II_p(0) = D_0^2 f_0$. On écrit le développement limité de f_0 , il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que

$$f_0(x) = D_0^2 f(x, x) + \|x\|^2 \varepsilon(x).$$

Le déterminant de la hessienne est égal à $K(0)$. Si $K(0) > 0$ alors la hessienne est définie positive ou négative la fonction f_0 à un extremum local en 0. Si $K(0) < 0$ alors la hessienne est de signature $(1, 1)$ et 0 n'est pas un extremum local. \square

On se donne des coordonnées (U, f) et on cherche la matrice symétrique,

$$\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \text{ de } II \text{ dans le repère } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

On se donne des coordonnées (U, f) et on cherche la matrice symétrique,

$$\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans le repère } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Soit $\xi \in \mathbf{R}^2$ et l'arc de U défini par $\gamma(t) = f(x_1 + \xi_1 t, x_2 + \xi_2 t)$. Ses dérivées sont :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + t\xi) + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x + t\xi) \\ \gamma''(0) &= \xi_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \xi_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x). \end{aligned}$$

On se donne des coordonnées (U, f) et on cherche la matrice symétrique,

$$\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \text{ de } // \text{ dans le repère } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Soit $\xi \in \mathbf{R}^2$ et l'arc de U défini par $\gamma(t) = f(x_1 + \xi_1 t, x_2 + \xi_2 t)$. Ses dérivées sont :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + t\xi) + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x + t\xi) \\ \gamma''(0) &= \xi_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \xi_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x). \end{aligned}$$

D'où $II_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) = \xi_1^2 A + 2\xi_1 \xi_2 B + \xi_2^2 C$. Par ailleurs

$$II_p(\xi, \xi) = \langle \gamma''(0), \nu \rangle =$$

On se donne des coordonnées (U, f) et on cherche la matrice symétrique,

$$\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \text{ de } // \text{ dans le repère } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Soit $\xi \in \mathbf{R}^2$ et l'arc de U défini par $\gamma(t) = f(x_1 + \xi_1 t, x_2 + \xi_2 t)$. Ses dérivées sont :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + t\xi) + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x + t\xi) \\ \gamma''(0) &= \xi_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \xi_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x). \end{aligned}$$

D'où $II_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) = \xi_1^2 A + 2\xi_1 \xi_2 B + \xi_2^2 C$. Par ailleurs

$$II_p(\xi, \xi) = \langle \gamma''(0), \nu \rangle = \left\langle \gamma''(0), \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|} \right\rangle$$

On se donne des coordonnées (U, f) et on cherche la matrice symétrique,

$$\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \text{ de } // \text{ dans le repère } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Soit $\xi \in \mathbf{R}^2$ et l'arc de U défini par $\gamma(t) = f(x_1 + \xi_1 t, x_2 + \xi_2 t)$. Ses dérivées sont :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + t\xi) + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x + t\xi) \\ \gamma''(0) &= \xi_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \xi_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x). \end{aligned}$$

D'où $II_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) = \xi_1^2 A + 2\xi_1 \xi_2 B + \xi_2^2 C$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} II_p(\xi, \xi) &= \langle \gamma''(0), \nu \rangle = \left\langle \gamma''(0), \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \xi_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \xi_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \right) \end{aligned}$$

On se donne des coordonnées (U, f) et on cherche la matrice symétrique,

$$\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans le repère } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Soit $\xi \in \mathbf{R}^2$ et l'arc de U défini par $\gamma(t) = f(x_1 + \xi_1 t, x_2 + \xi_2 t)$. Ses dérivées sont :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + t\xi) + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x + t\xi) \\ \gamma''(0) &= \xi_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \xi_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x). \end{aligned}$$

D'où $\| \gamma'(0) \|^2 = \xi_1^2 A + 2\xi_1 \xi_2 B + \xi_2^2 C$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \| \gamma''(0) \|^2 &= \langle \gamma''(0), \nu \rangle = \langle \gamma''(0), \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \|} \rangle \\ &= \frac{1}{\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \|} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \xi_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \xi_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \right) \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \|} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) \right), \\ B &= \frac{1}{\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \|} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \right), \\ C &= \frac{1}{\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \|} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \right). \end{aligned}$$

On voit à nouveau que lorsque Σ est le graphe d'une fonction lisse $f_0 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_0(0) = 0$ et $D_0 f_0 = 0$, alors II_0 est la hessienne de f_0 en 0.

On voit à nouveau que lorsque Σ est le graphe d'une fonction lisse $f_0 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_0(0) = 0$ et $D_0 f_0 = 0$, alors II_0 est la hessienne de f_0 en 0.

Proposition 22

Soit (U, f) des coordonnées locales sur Σ et α_f et β_f les expressions locales des deux formes fondamentales.

On voit à nouveau que lorsque Σ est le graphe d'une fonction lisse $f_0 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_0(0) = 0$ et $D_0 f_0 = 0$, alors II_0 est la hessienne de f_0 en 0.

Proposition 22

Soit (U, f) des coordonnées locales sur Σ et α_f et β_f les expressions locales des deux formes fondamentales. Alors pour tout $x \in U$:

$$K_{\Sigma}(f(x)) = \det(\beta_f \alpha_f^{-1}) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}.$$

On voit à nouveau que lorsque Σ est le graphe d'une fonction lisse $f_0 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_0(0) = 0$ et $D_0 f_0 = 0$, alors II_0 est la hessienne de f_0 en 0.

Proposition 22

Soit (U, f) des coordonnées locales sur Σ et α_f et β_f les expressions locales des deux formes fondamentales. Alors pour tout $x \in U$:

$$K_{\Sigma}(f(x)) = \det(\beta_f \alpha_f^{-1}) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}.$$

Preuve : Soit $\omega_f(x)$ la matrice de $W_p = -d_p \nu(p)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$.

On voit à nouveau que lorsque Σ est le graphe d'une fonction lisse $f_0 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_0(0) = 0$ et $D_0 f_0 = 0$, alors II_0 est la hessienne de f_0 en 0.

Proposition 22

Soit (U, f) des coordonnées locales sur Σ et α_f et β_f les expressions locales des deux formes fondamentales. Alors pour tout $x \in U$:

$$K_{\Sigma}(f(x)) = \det(\beta_f \alpha_f^{-1}) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}.$$

Preuve : Soit $\omega_f(x)$ la matrice de $W_p = -d_p \nu(p)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$. Pour tout ξ, ζ on a

$$II_p(D_x f(\xi), D_x f(\zeta)) = {}^t \xi \beta_f(x) \zeta.$$

On voit à nouveau que lorsque Σ est le graphe d'une fonction lisse $f_0 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_0(0) = 0$ et $D_0 f_0 = 0$, alors II_0 est la hessienne de f_0 en 0.

Proposition 22

Soit (U, f) des coordonnées locales sur Σ et α_f et β_f les expressions locales des deux formes fondamentales. Alors pour tout $x \in U$:

$$K_{\Sigma}(f(x)) = \det(\beta_f \alpha_f^{-1}) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}.$$

Preuve : Soit $\omega_f(x)$ la matrice de $W_p = -d_p \nu(p)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$. Pour tout ξ, ζ on a

$$II_p(D_x f(\xi), D_x f(\zeta)) = {}^t \xi \beta_f(x) \zeta.$$

Mais aussi

$$II_p(D_x f(\xi), D_x f(\zeta)) = -\langle d_p \nu(D_x f(\xi)), D_x f(\zeta) \rangle = {}^t (\omega_f(x) \cdot \xi) \alpha_f(x) \cdot \zeta.$$

On voit à nouveau que lorsque Σ est le graphe d'une fonction lisse $f_0 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_0(0) = 0$ et $D_0 f_0 = 0$, alors II_0 est la hessienne de f_0 en 0.

Proposition 22

Soit (U, f) des coordonnées locales sur Σ et α_f et β_f les expressions locales des deux formes fondamentales. Alors pour tout $x \in U$:

$$K_{\Sigma}(f(x)) = \det(\beta_f \alpha_f^{-1}) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}.$$

Preuve : Soit $\omega_f(x)$ la matrice de $W_p = -d_p \nu(p)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$. Pour tout ξ, ζ on a

$$II_p(D_x f(\xi), D_x f(\zeta)) = {}^t \xi \beta_f(x) \zeta.$$

Mais aussi

$$II_p(D_x f(\xi), D_x f(\zeta)) = -\langle d_p \nu(D_x f(\xi)), D_x f(\zeta) \rangle = {}^t (\omega_f(x) \cdot \xi) \alpha_f(x) \cdot \zeta.$$

Donc ${}^t \omega_f \alpha_f = \beta_f$ ou si on préfère $\beta_f = \alpha_f \omega_f$. \square

Exercice 5

Soit S une surface de révolution, c'est-à-dire paramétrée par une application de la forme :

$$f(u, v) = (\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_2(v))$$

où $0 < u < 2\pi$, $a < v < b$ et $\gamma_1(v) > 0$. L'arc $\gamma = (\gamma_1, 0, \gamma_2)$ est appelé la génératrice de S . La surface S est obtenue en faisant tourner γ autour de l'axe Ox_3 . Nous supposons la génératrice paramétrée par longueur d'arc, c'est-à-dire $(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = 1$.

Calculer la courbure de S puis ses courbures et directions principales.

Exercice 5

Soit S une surface de révolution, c'est-à-dire paramétrée par une application de la forme :

$$f(u, v) = (\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_2(v))$$

où $0 < u < 2\pi$, $a < v < b$ et $\gamma_1(v) > 0$. L'arc $\gamma = (\gamma_1, 0, \gamma_2)$ est appelé la génératrice de S . La surface S est obtenue en faisant tourner γ autour de l'axe Ox_3 . Nous supposons la génératrice paramétrée par longueur d'arc, c'est-à-dire $(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = 1$.

Calculer la courbure de S puis ses courbures et directions principales.

Exercice 6

Donner un exemple de surface de révolution à courbure constante négative. Faire un dessin du tore T obtenu en prenant $\gamma = (2 + \cos v, 0, \sin v)$. Déterminer les points où la courbure est positive, ceux où elle est négative.

Theorema Egregium

Définition 23

Deux nappes Σ_1 et Σ_2 sont dites isométriques s'il existe des coordonnées (U, f) et (V, g) resp. sur Σ_1 et Σ_2 telle que $\alpha_f = \alpha_g$.

Theorema Egregium

Définition 23

Deux nappes Σ_1 et Σ_2 sont dites isométriques s'il existe des coordonnées (U, f) et (V, g) resp. sur Σ_1 et Σ_2 telle que $\alpha_f = \alpha_g$.

Exemple 24

- Un morceau de plan et un morceau de cylindre sont isométriques mais leurs deuxièmes formes fondamentales sont différentes.

Theorema Egregium

Définition 23

Deux nappes Σ_1 et Σ_2 sont dites isométriques s'il existe des coordonnées (U, f) et (V, g) resp. sur Σ_1 et Σ_2 telle que $\alpha_f = \alpha_g$.

Exemple 24

- Un morceau de plan et un morceau de cylindre sont isométriques mais leurs deuxièmes formes fondamentales sont différentes.
- Soit p et q deux points de S^2 , il existe un voisinage Ω de p et un voisinage Ω' de q tels que $\Omega \cap S^2$ et $\Omega' \cap S^2$ sont isométriques.

Theorema Egregium

Définition 23

Deux nappes Σ_1 et Σ_2 sont dites isométriques s'il existe des coordonnées (U, f) et (V, g) resp. sur Σ_1 et Σ_2 telle que $\alpha_f = \alpha_g$.

Exemple 24

- Un morceau de plan et un morceau de cylindre sont isométriques mais leurs deuxièmes formes fondamentales sont différentes.
- Soit p et q deux points de S^2 , il existe un voisinage Ω de p et un voisinage Ω' de q tels que $\Omega \cap S^2$ et $\Omega' \cap S^2$ sont isométriques.

La discussion sur la longueur des courbes lues sur une carte se reformule en : la sphère est-elle localement isométrique au plan ?

La réponse est finalement donnée par le (remarquable) théorème suivant.

Théorème 25 (*Theorema Egregium* de Gauss)

Deux nappes isométriques ont même courbure.

La réponse est finalement donnée par le (remarquable) théorème suivant.

Théorème 25 (*Theorema Egregium* de Gauss)

Deux nappes isométriques ont même courbure.

Corollaire 26

Quel que soit le bout de terre qu'elle représente une carte est toujours fausse.

La réponse est finalement donnée par le (remarquable) théorème suivant.

Théorème 25 (*Theorema Egregium* de Gauss)

Deux nappes isométriques ont même courbure.

Corollaire 26

Quel que soit le bout de terre qu'elle représente une carte est toujours fausse.

preuve du corollaire : Le plan et la sphère ont des courbures partout différentes. Ils sont donc nulle part isométriques. \square

La réponse est finalement donnée par le (remarquable) théorème suivant.

Théorème 25 (*Theorema Egregium* de Gauss)

Deux nappes isométriques ont même courbure.

Corollaire 26

Quel que soit le bout de terre qu'elle représente une carte est toujours fausse.

preuve du corollaire : Le plan et la sphère ont des courbures partout différentes. Ils sont donc nulle part isométriques. \square

Preuve du théorème :

La réponse est finalement donnée par le (remarquable) théorème suivant.

Théorème 25 (*Theorema Egregium* de Gauss)

Deux nappes isométriques ont même courbure.

Corollaire 26

Quel que soit le bout de terre qu'elle représente une carte est toujours fausse.

preuve du corollaire : Le plan et la sphère ont des courbures partout différentes. Ils sont donc nulle part isométriques. \square

Preuve du théorème : Si on arrive à trouver des coordonnées (U, f) sur Σ pour lesquelles on sait calculer K en fonction des coefficients de α_f , le théorème sera prouvé.

La réponse est finalement donnée par le (remarquable) théorème suivant.

Théorème 25 (*Theorema Egregium* de Gauss)

Deux nappes isométriques ont même courbure.

Corollaire 26

Quel que soit le bout de terre qu'elle représente une carte est toujours fausse.

preuve du corollaire : Le plan et la sphère ont des courbures partout différentes. Ils sont donc nulle part isométriques. \square

Preuve du théorème : Si on arrive à trouver des coordonnées (U, f) sur Σ pour lesquelles on sait calculer K en fonction des coefficients de α_f , le théorème sera prouvé. On cherche donc des coordonnées telles que α_f soit le plus simple possible.

Lemme 27 (de Gauss (admis ?))

Au voisinage de tout point de Σ il existe des coordonnées (U, f) telles que

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2(x) \end{pmatrix},$$

où J est une fonction lisse partout non nulle.

Lemme 27 (de Gauss (admis ?))

Au voisinage de tout point de Σ il existe des coordonnées (U, f) telles que

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2(x) \end{pmatrix},$$

où J est une fonction lisse partout non nulle.

On se place dans ces coordonnées. On note $\omega_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

On écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$:

On écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k \in \{1,2\}} \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} + II\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) N_f, \quad (*)$$

les $\Gamma_{i,j}^k$ dépendent de x et sont appelés les *symboles de Christoffel*, le coefficient devant N_f a été obtenu à la proposition 17.

On écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k \in \{1,2\}} \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \text{II}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) N_f, \quad (*)$$

les $\Gamma_{i,j}^k$ dépendent de x et sont appelés les *symboles de Christoffel*, le coefficient devant N_f a été obtenu à la proposition 17.

On part des égalités $\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = 1$ et $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0$ et on dérive :

On écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k \in \{1,2\}} \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} + II\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) N_f, \quad (*)$$

les $\Gamma_{i,j}^k$ dépendent de x et sont appelés les *symboles de Christoffel*, le coefficient devant N_f a été obtenu à la proposition 17.

On part des égalités $\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = 1$ et $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0$ et on dérive :

$$\partial_1(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{11}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

On écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k \in \{1,2\}} \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} + II\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) N_f, \quad (*)$$

les $\Gamma_{i,j}^k$ dépendent de x et sont appelés les *symboles de Christoffel*, le coefficient devant N_f a été obtenu à la proposition 17.

On part des égalités $\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = 1$ et $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0$ et on dérive :

$$\partial_1(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{11}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

$$\partial_2(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{21}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

On écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k \in \{1,2\}} \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \text{II}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) N_f, \quad (*)$$

les $\Gamma_{i,j}^k$ dépendent de x et sont appelés les *symboles de Christoffel*, le coefficient devant N_f a été obtenu à la proposition 17.

On part des égalités $\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = 1$ et $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0$ et on dérive :

$$\partial_1(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{11}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

$$\partial_2(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{21}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

$$\partial_1(\langle \partial_2 f, \partial_1 f \rangle) = \langle \partial_{12}^2 f, \partial_1 f \rangle + \langle \partial_2 f, \partial_{11}^2 f \rangle = 0.$$

On écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k \in \{1,2\}} \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \text{II}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) N_f, \quad (*)$$

les $\Gamma_{i,j}^k$ dépendent de x et sont appelés les *symboles de Christoffel*, le coefficient devant N_f a été obtenu à la proposition 17.

On part des égalités $\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = 1$ et $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0$ et on dérive :

$$\partial_1(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{11}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

$$\partial_2(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{21}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

$$\partial_1(\langle \partial_2 f, \partial_1 f \rangle) = \langle \partial_{12}^2 f, \partial_1 f \rangle + \langle \partial_2 f, \partial_{11}^2 f \rangle = 0.$$

On voit donc que $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$ et donc $\partial_{11}^2 f = AN_f$.

On écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k \in \{1,2\}} \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \text{II}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) N_f, \quad (*)$$

les $\Gamma_{i,j}^k$ dépendent de x et sont appelés les *symboles de Christoffel*, le coefficient devant N_f a été obtenu à la proposition 17.

On part des égalités $\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = 1$ et $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0$ et on dérive :

$$\partial_1(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{11}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

$$\partial_2(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{21}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

$$\partial_1(\langle \partial_2 f, \partial_1 f \rangle) = \langle \partial_{12}^2 f, \partial_1 f \rangle + \langle \partial_2 f, \partial_{11}^2 f \rangle = 0.$$

On voit donc que $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$ et donc $\partial_{11}^2 f = AN_f$. On a aussi $\Gamma_{12}^1 = 0$.

On écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k \in \{1,2\}} \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \text{II}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) N_f, \quad (*)$$

les $\Gamma_{i,j}^k$ dépendent de x et sont appelés les *symboles de Christoffel*, le coefficient devant N_f a été obtenu à la proposition 17.

On part des égalités $\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = 1$ et $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0$ et on dérive :

$$\partial_1(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{11}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

$$\partial_2(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) = 2\langle \partial_{21}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0,$$

$$\partial_1(\langle \partial_2 f, \partial_1 f \rangle) = \langle \partial_{12}^2 f, \partial_1 f \rangle + \langle \partial_2 f, \partial_{11}^2 f \rangle = 0.$$

On voit donc que $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$ et donc $\partial_{11}^2 f = AN_f$. On a aussi $\Gamma_{12}^1 = 0$.

(on voit au passage que l'accélération de la courbe $t \mapsto f(t, 0)$ est toujours normale à Σ)

De même $\Gamma_{12}^2 = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f$ (et donc $\partial_{12}^2 f = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f + BN_f$) :

$$\partial_1 J^2 = 2J \partial_1 J = \partial_1 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \langle \partial_{12}^2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 J^2.$$

De même $\Gamma_{12}^2 = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f$ (et donc $\partial_{12}^2 f = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f + BN_f$) :

$$\partial_1 J^2 = 2J \partial_1 J = \partial_1 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \langle \partial_{12}^2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 J^2.$$

On note maintenant J' et J'' les dérivées $\partial_1 J$ et $\partial_{11}^2 J$.

De même $\Gamma_{12}^2 = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f$ (et donc $\partial_{12}^2 f = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f + B N_f$) :

$$\partial_1 J^2 = 2J \partial_1 J = \partial_1 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \langle \partial_{12}^2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 J^2.$$

On note maintenant J' et J'' les dérivées $\partial_1 J$ et $\partial_{11}^2 J$.

D'après le lemme de Schwarz, on a $\partial_2(\partial_{11}^2 f) = \partial_1(\partial_{12}^2 f)$. Or $\partial_{11}^2 f = A N_f$, d'où

$$(\partial_2 A) N_f + A \partial_2 N_f =$$

De même $\Gamma_{12}^2 = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f$ (et donc $\partial_{12}^2 f = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f + B N_f$) :

$$\partial_1 J^2 = 2J \partial_1 J = \partial_1 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \langle \partial_{12}^2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 J^2.$$

On note maintenant J' et J'' les dérivées $\partial_1 J$ et $\partial_{11}^2 J$.

D'après le lemme de Schwarz, on a $\partial_2(\partial_{11}^2 f) = \partial_1(\partial_{12}^2 f)$. Or $\partial_{11}^2 f = A N_f$, d'où

$$(\partial_2 A) N_f + A \partial_2 N_f = \partial_1 \left(\frac{J'}{J} \right) \partial_2 f + \frac{J'}{J} \partial_{12}^2 f + \partial_1 B N_f + B \partial_1 N_f.$$

De même $\Gamma_{12}^2 = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f$ (et donc $\partial_{12}^2 f = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f + B N_f$) :

$$\partial_1 J^2 = 2J \partial_1 J = \partial_1 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \langle \partial_{12}^2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 J^2.$$

On note maintenant J' et J'' les dérivées $\partial_1 J$ et $\partial_{11}^2 J$.

D'après le lemme de Schwarz, on a $\partial_2(\partial_{11}^2 f) = \partial_1(\partial_{12}^2 f)$. Or $\partial_{11}^2 f = A N_f$, d'où

$$(\partial_2 A) N_f + A \partial_2 N_f = \partial_1 \left(\frac{J'}{J} \right) \partial_2 f + \frac{J'}{J} \partial_{12}^2 f + \partial_1 B N_f + B \partial_1 N_f.$$

Par définition la matrice de ω_f est celle $-DN_f$, d'où, en remplaçant $\partial_{12}^2 f$:

$$\begin{aligned} (\partial_2 A) N_f - A(c \partial_1 f + d \partial_2 f) &= \left(\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2} \right) \partial_2 f + \frac{J'}{J} \left(\frac{J'}{J} \partial_2 f + B N_f \right) \\ &\quad + (\partial_1 B) N_f - B(a \partial_1 f + b \partial_2 f). \end{aligned}$$

De même $\Gamma_{12}^2 = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f$ (et donc $\partial_{12}^2 f = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f + B N_f$) :

$$\partial_1 J^2 = 2J \partial_1 J = \partial_1 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \langle \partial_{12}^2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 J^2.$$

On note maintenant J' et J'' les dérivées $\partial_1 J$ et $\partial_{11}^2 J$.

D'après le lemme de Schwarz, on a $\partial_2(\partial_{11}^2 f) = \partial_1(\partial_{12}^2 f)$. Or $\partial_{11}^2 f = A N_f$, d'où

$$(\partial_2 A) N_f + A \partial_2 N_f = \partial_1 \left(\frac{J'}{J} \right) \partial_2 f + \frac{J'}{J} \partial_{12}^2 f + \partial_1 B N_f + B \partial_1 N_f.$$

Par définition la matrice de ω_f est celle $-DN_f$, d'où, en remplaçant $\partial_{12}^2 f$:

$$\begin{aligned} (\partial_2 A) N_f - A(c \partial_1 f + d \partial_2 f) &= \left(\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2} \right) \partial_2 f + \frac{J'}{J} \left(\frac{J'}{J} \partial_2 f + B N_f \right) \\ &\quad + (\partial_1 B) N_f - B(a \partial_1 f + b \partial_2 f). \end{aligned}$$

En considérant le coefficient devant $\partial_2 f$, on obtient $-\frac{J''}{J} = Ad - Bb$. Vu la forme de α_f et sachant que $\beta_f = \alpha_f \omega_f$, on a $A = a$ et $B = c$.

De même $\Gamma_{12}^2 = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f$ (et donc $\partial_{12}^2 f = \frac{\partial_1 J}{J} \partial_2 f + B N_f$) :

$$\partial_1 J^2 = 2J \partial_1 J = \partial_1 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \langle \partial_{12}^2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \Gamma_{12}^2 J^2.$$

On note maintenant J' et J'' les dérivées $\partial_1 J$ et $\partial_{11}^2 J$.

D'après le lemme de Schwarz, on a $\partial_2(\partial_{11}^2 f) = \partial_1(\partial_{12}^2 f)$. Or $\partial_{11}^2 f = A N_f$, d'où

$$(\partial_2 A) N_f + A \partial_2 N_f = \partial_1 \left(\frac{J'}{J} \right) \partial_2 f + \frac{J'}{J} \partial_{12}^2 f + \partial_1 B N_f + B \partial_1 N_f.$$

Par définition la matrice de ω_f est celle $-DN_f$, d'où, en remplaçant $\partial_{12}^2 f$:

$$\begin{aligned} (\partial_2 A) N_f - A(c \partial_1 f + d \partial_2 f) &= \left(\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2} \right) \partial_2 f + \frac{J'}{J} \left(\frac{J'}{J} \partial_2 f + B N_f \right) \\ &\quad + (\partial_1 B) N_f - B(a \partial_1 f + b \partial_2 f). \end{aligned}$$

En considérant le coefficient devant $\partial_2 f$, on obtient $-\frac{J''}{J} = Ad - Bb$. Vu la forme de α_f et sachant que $\beta_f = \alpha_f \omega_f$, on a $A = a$ et $B = c$. Ainsi

$$-\frac{J''}{J} = ad - bc = \det(\omega_f) = K. \quad \square$$

La réciproque du *Theorema egregium* est fausse :

Exercice 7

Montrer que la nappe Σ paramétrée par $f : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, \log u)$ et l'hélicoïde paramétré par $g : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, v)$ ont même courbure mais ne sont pas isométriques.

La réciproque du *Theorema egregium* est fautive :

Exercice 7

Montrer que la nappe Σ paramétrée par $f : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, \log u)$ et l'hélicoïde paramétré par $g : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, v)$ ont même courbure mais ne sont pas isométriques.

Exercice 8

Soit (U, f) des coordonnées sur Σ vérifiant les conclusions du lemme 27. Quitte à restreindre U on le suppose convexe. Soient (a, c) et (b, c) deux points de U et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ l'arc paramétré défini par $\gamma(t) = f(ta + (1 - t)b, c)$.
Montrer que Γ est le plus court arc tracé sur Σ reliant $f(a, c)$ et $f(b, c)$.

Géodésiques

Soit (I, γ) un arc tracé sur Σ .

Géodésiques

Soit (I, γ) un arc tracé sur Σ . À quel point γ peut-il aller tout droit ?

Géodésiques

Soit (I, γ) un arc tracé sur Σ . À quel point γ peut-il aller tout droit ? On a vu à la proposition 17 que $\langle \gamma'', \nu \rangle$ est imposé par Σ .

Géodésiques

Soit (I, γ) un arc tracé sur Σ . À quel point γ peut-il aller tout droit? On a vu à la proposition 17 que $\langle \gamma'', \nu \rangle$ est imposé par Σ . A priori

$$\gamma''(t) - \langle \gamma'', \nu(\gamma(t)) \rangle \nu(\gamma(t)),$$

ie la partie tangentielle de l'accélération, est libre.

Géodésiques

Soit (I, γ) un arc tracé sur Σ . À quel point γ peut-il aller tout droit ? On a vu à la proposition 17 que $\langle \gamma'', \nu \rangle$ est imposé par Σ . A priori

$$\gamma''(t) - \langle \gamma'', \nu(\gamma(t)) \rangle \nu(\gamma(t)),$$

ie la partie tangentielle de l'accélération, est libre. On va demander qu'elle soit nulle.

Géodésiques

Soit (I, γ) un arc tracé sur Σ . À quel point γ peut-il aller tout droit ? On a vu à la proposition 17 que $\langle \gamma'', \nu \rangle$ est imposé par Σ . A priori

$$\gamma''(t) - \langle \gamma'', \nu(\gamma(t)) \rangle \nu(\gamma(t)),$$

ie la partie tangentielle de l'accélération, est libre. On va demander qu'elle soit nulle.

Définition 28

Un arc paramétré deux fois dérivable (I, γ) tracé sur Σ tel que pour tout $t \in I$ $\gamma''(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma^\perp$ est appelé une géodésique de Σ .

On fera attention au fait que le reparamétrage d'une géodésique n'est pas forcément une géodésique.

Exemple 29

Les grands cercles de S^2 , c'est-à-dire les courbes obtenues en prenant l'intersection de la sphère avec un plan P passant par le centre de la sphère, sont des géodésiques de la sphère.

Exemple 29

Les grands cercles de S^2 , c'est-à-dire les courbes obtenues en prenant l'intersection de la sphère avec un plan P passant par le centre de la sphère, sont des géodésiques de la sphère.

Plus précisément, si (I, γ) est un paramétrage par longueur d'arc de $P \cap S^2$, alors $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$,

Exemple 29

Les grands cercles de S^2 , c'est-à-dire les courbes obtenues en prenant l'intersection de la sphère avec un plan P passant par le centre de la sphère, sont des géodésiques de la sphère.

Plus précisément, si (I, γ) est un paramétrage par longueur d'arc de $P \cap S^2$, alors $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$, de plus γ' et γ'' sont contenus dans P et non nuls.

Exemple 29

Les grands cercles de S^2 , c'est-à-dire les courbes obtenues en prenant l'intersection de la sphère avec un plan P passant par le centre de la sphère, sont des géodésiques de la sphère.

Plus précisément, si (I, γ) est un paramétrage par longueur d'arc de $P \cap S^2$, alors $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$, de plus γ' et γ'' sont contenus dans P et non nuls. Ainsi (γ', γ'') est une base orthogonale de P .

Exemple 29

Les grands cercles de S^2 , c'est-à-dire les courbes obtenues en prenant l'intersection de la sphère avec un plan P passant par le centre de la sphère, sont des géodésiques de la sphère.

Plus précisément, si (I, γ) est un paramétrage par longueur d'arc de $P \cap S^2$, alors $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$, de plus γ' et γ'' sont contenus dans P et non nuls. Ainsi (γ', γ'') est une base orthogonale de P . Comme ν est perpendiculaire à γ' , le vecteur γ'' est proportionnel à ν .

Exemple 29

Les grands cercles de S^2 , c'est-à-dire les courbes obtenues en prenant l'intersection de la sphère avec un plan P passant par le centre de la sphère, sont des géodésiques de la sphère.

Plus précisément, si (I, γ) est un paramétrage par longueur d'arc de $P \cap S^2$, alors $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$, de plus γ' et γ'' sont contenus dans P et non nuls. Ainsi (γ', γ'') est une base orthogonale de P . Comme ν est perpendiculaire à γ' , le vecteur γ'' est proportionnel à ν .

Proposition 30

Les géodésiques sont toujours parcourues à vitesse constante.

Exemple 29

Les grands cercles de S^2 , c'est-à-dire les courbes obtenues en prenant l'intersection de la sphère avec un plan P passant par le centre de la sphère, sont des géodésiques de la sphère.

Plus précisément, si (I, γ) est un paramétrage par longueur d'arc de $P \cap S^2$, alors $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$, de plus γ' et γ'' sont contenus dans P et non nuls. Ainsi (γ', γ'') est une base orthogonale de P . Comme ν est perpendiculaire à γ' , le vecteur γ'' est proportionnel à ν .

Proposition 30

Les géodésiques sont toujours parcourues à vitesse constante.

Preuve : Soit (I, γ) une géodésique. La dérivée de l'application $t \mapsto \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$ est donnée par $t \mapsto 2\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle$.

Exemple 29

Les grands cercles de S^2 , c'est-à-dire les courbes obtenues en prenant l'intersection de la sphère avec un plan P passant par le centre de la sphère, sont des géodésiques de la sphère.

Plus précisément, si (I, γ) est un paramétrage par longueur d'arc de $P \cap S^2$, alors $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$, de plus γ' et γ'' sont contenus dans P et non nuls. Ainsi (γ', γ'') est une base orthogonale de P . Comme ν est perpendiculaire à γ' , le vecteur γ'' est proportionnel à ν .

Proposition 30

Les géodésiques sont toujours parcourues à vitesse constante.

Preuve : Soit (I, γ) une géodésique. La dérivée de l'application $t \mapsto \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$ est donnée par $t \mapsto 2\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle$. Comme $\gamma''(t)$ est perpendiculaire au tangent ceci est nul. La norme de $\gamma'(t)$ est donc constante. \square

Théorème 31

Pour tout point $p \in \Sigma$ et tout vecteur $X \in T_p\Sigma$, il existe une unique géodésique « maximale^a » (I, γ) telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$. Celle-ci est lisse.

a. au sens des solutions d'équations différentielles

Théorème 31

Pour tout point $p \in \Sigma$ et tout vecteur $X \in T_p\Sigma$, il existe une unique géodésique « maximale^a » (I, γ) telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$. Celle-ci est lisse.

a. au sens des solutions d'équations différentielles

Preuve : Soit (U, f) un système de coordonnées sur Σ et $c : I \rightarrow U$ un arc de U .

Théorème 31

Pour tout point $p \in \Sigma$ et tout vecteur $X \in T_p\Sigma$, il existe une unique géodésique « maximale^a » (I, γ) telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$. Celle-ci est lisse.

a. au sens des solutions d'équations différentielles

Preuve : Soit (U, f) un système de coordonnées sur Σ et $c : I \rightarrow U$ un arc de U . On veut savoir à quelle condition $\gamma = f \circ c$ est une géodésique.

Théorème 31

Pour tout point $p \in \Sigma$ et tout vecteur $X \in T_p \Sigma$, il existe une unique géodésique « maximale^a » (I, γ) telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$. Celle-ci est lisse.

a. au sens des solutions d'équations différentielles

Preuve : Soit (U, f) un système de coordonnées sur Σ et $c : I \rightarrow U$ un arc de U . On veut savoir à quelle condition $\gamma = f \circ c$ est une géodésique. On part de

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= D_{c(t)}^2 f(c'(t), c'(t)) + D_{c(t)} f(c''(t)) \\ &= \sum_{i,j} c'_i(t) c'_j(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c(t)) + \sum_k c''_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Ce qui donne en utilisant les $\Gamma_{i,j}^k$ vus plus haut :

$$\begin{aligned} \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \nu(\gamma(t)) \rangle \nu(\gamma(t)) &= \sum_{i,j} (c'_i(t) c'_j(t) \sum_k \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}) + \sum_k c''_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ &= \sum_k \left(c''_k(t) + \sum_{i,j} c'_i(t) c'_j(t) \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{\partial f}{\partial x_k}(c(t)) \end{aligned}$$

Ainsi γ est une géodésique si et seulement si pour $k = 1$ et 2 on a

$$\forall t \in I, \quad c_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k c_i'(t) c_j'(t) = 0. \quad (**)$$

Ainsi γ est une géodésique si et seulement si pour $k = 1$ et 2 on a

$$\forall t \in I, \quad c_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k c_i'(t) c_j'(t) = 0. \quad (**)$$

Ainsi (I, γ) est une géodésique si et seulement si (I, c) est une solution de l'équation différentielle ci-dessus.

Ainsi γ est une géodésique si et seulement si pour $k = 1$ et 2 on a

$$\forall t \in I, \quad c_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k c_i'(t) c_j'(t) = 0. \quad (**)$$

Ainsi (I, γ) est une géodésique si et seulement si (I, c) est une solution de l'équation différentielle ci-dessus. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet alors de conclure. \square

Ainsi γ est une géodésique si et seulement si pour $k = 1$ et 2 on a

$$\forall t \in I, \quad c_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k c_i'(t) c_j'(t) = 0. \quad (**)$$

Ainsi (I, γ) est une géodésique si et seulement si (I, c) est une solution de l'équation différentielle ci-dessus. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet alors de conclure. \square

Exercice 9

Soit $(]a, b[, \gamma)$ la géodésique maximale telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$ et $k \in \mathbf{R}^*$.
Montrer que $(]a/k, b/k[, t \mapsto \gamma(kt))$ est la géodésique $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = kX$.

Ainsi γ est une géodésique si et seulement si pour $k = 1$ et 2 on a

$$\forall t \in I, \quad c_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k c_i'(t) c_j'(t) = 0. \quad (**)$$

Ainsi (I, γ) est une géodésique si et seulement si (I, c) est une solution de l'équation différentielle ci-dessus. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet alors de conclure. \square

Exercice 9

Soit $(]a, b[, \gamma)$ la géodésique maximale telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$ et $k \in \mathbf{R}^*$.
Montrer que $(]a/k, b/k[, t \mapsto \gamma(kt))$ est la géodésique $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = kX$.

Montrer que les seules géodésiques de S^2 sont les grands cercles parcourus à vitesse constante.

Ainsi γ est une géodésique si et seulement si pour $k = 1$ et 2 on a

$$\forall t \in I, \quad c_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k c_i'(t) c_j'(t) = 0. \quad (**)$$

Ainsi (I, γ) est une géodésique si et seulement si (I, c) est une solution de l'équation différentielle ci-dessus. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet alors de conclure. \square

Exercice 9

Soit $(]a, b[, \gamma)$ la géodésique maximale telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$ et $k \in \mathbf{R}^*$. Montrer que $(]a/k, b/k[, t \mapsto \gamma(kt))$ est la géodésique $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = kX$.

Montrer que les seules géodésiques de S^2 sont les grands cercles parcourus à vitesse constante.

La notion de géodésique doit avoir un sens pour les "habitants" de Σ . Pour eux, il s'agit des courbes allant tout droit à vitesse constante.

Ainsi γ est une géodésique si et seulement si pour $k = 1$ et 2 on a

$$\forall t \in I, \quad c_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k c_i'(t) c_j'(t) = 0. \quad (**)$$

Ainsi (I, γ) est une géodésique si et seulement si (I, c) est une solution de l'équation différentielle ci-dessus. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet alors de conclure. \square

Exercice 9

Soit $(]a, b[, \gamma)$ la géodésique maximale telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$ et $k \in \mathbf{R}^*$. Montrer que $(]a/k, b/k[, t \mapsto \gamma(kt))$ est la géodésique $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = kX$.

Montrer que les seules géodésiques de S^2 sont les grands cercles parcourus à vitesse constante.

La notion de géodésique doit avoir un sens pour les "habitants" de Σ . Pour eux, il s'agit des courbes allant tout droit à vitesse constante. C'est confirmé par le fait que l'on peut exprimer les $\Gamma_{i,j}^k$ en fonction de E, F, G et de leurs dérivées.

Preuve du lemme de Gauss 27

Les géodésiques sont la clé de la preuve du lemme de Gauss.

Preuve du lemme de Gauss 27

Les géodésiques sont la clé de la preuve du lemme de Gauss.

On note $c_{x,v}$ la solution maximale de l'équation différentielle (***) ayant pour conditions initiales (x, v) où $x \in U$ et $v \in \mathbf{R}^2$.

Preuve du lemme de Gauss 27

Les géodésiques sont la clé de la preuve du lemme de Gauss.

On note $c_{x,v}$ la solution maximale de l'équation différentielle (***) ayant pour conditions initiales (x, v) où $x \in U$ et $v \in \mathbf{R}^2$.

D'après les théorèmes classiques sur les équations différentielles (cf. [Laudenbach] si besoin), tout $(x_0, v_0) \in U \times \mathbf{R}^2$ possède un voisinage ouvert $V \times W$ et un $\varepsilon > 0$ tels que l'application

$$\begin{aligned} \Phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \times W &\rightarrow U \\ (t, x, v) &\mapsto c_{x,v}(t) \end{aligned}$$

est bien définie et lisse.

Preuve du lemme de Gauss 27

Les géodésiques sont la clé de la preuve du lemme de Gauss.

On note $c_{x,v}$ la solution maximale de l'équation différentielle $(**)$ ayant pour conditions initiales (x, v) où $x \in U$ et $v \in \mathbf{R}^2$.

D'après les théorèmes classiques sur les équations différentielles (cf. [Laudenbach] si besoin), tout $(x_0, v_0) \in U \times \mathbf{R}^2$ possède un voisinage ouvert $V \times W$ et un $\varepsilon > 0$ tels que l'application

$$\begin{aligned} \Phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \times W &\rightarrow U \\ (t, x, v) &\mapsto c_{x,v}(t) \end{aligned}$$

est bien définie et lisse.

Si on réduit la vitesse initiale (ie $\|v\|$), on augmente le temps d'existence de la solution (ex. 9). Quitte à prendre W plus petit on peut donc supposer que $\varepsilon = 2$.

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$.

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$. C'est une application lisse traditionnellement notée \exp_{x_0} .

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$. C'est une application lisse traditionnellement notée \exp_{x_0} . Par définition $\exp_{x_0}(v) = \Phi(1, x_0, v) = c_{x_0, v}(1)$.

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$. C'est une application lisse traditionnellement notée \exp_{x_0} . Par définition $\exp_{x_0}(v) = \Phi(1, x_0, v) = c_{x_0, v}(1)$.

Lemme 32

Pour tout $x \in U$, l'application \exp_x est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$. C'est une application lisse traditionnellement notée \exp_{x_0} . Par définition $\exp_{x_0}(v) = \Phi(1, x_0, v) = c_{x_0, v}(1)$.

Lemme 32

Pour tout $x \in U$, l'application \exp_{x_0} est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

Preuve : L'application \exp_{x_0} est lisse, il suffit donc de montrer que sa différentielle en 0 est inversible.

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$. C'est une application lisse traditionnellement notée \exp_{x_0} . Par définition $\exp_{x_0}(v) = \Phi(1, x_0, v) = c_{x_0, v}(1)$.

Lemme 32

Pour tout $x \in U$, l'application \exp_{x_0} est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

Preuve : L'application \exp_{x_0} est lisse, il suffit donc de montrer que sa différentielle en 0 est inversible. Pour tout $v \in \mathbf{R}^2$, on a :

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$. C'est une application lisse traditionnellement notée \exp_{x_0} . Par définition $\exp_{x_0}(v) = \Phi(1, x_0, v) = c_{x_0, v}(1)$.

Lemme 32

Pour tout $x \in U$, l'application \exp_{x_0} est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

Preuve : L'application \exp_{x_0} est lisse, il suffit donc de montrer que sa différentielle en 0 est inversible. Pour tout $v \in \mathbf{R}^2$, on a :

$$D_0 \exp_{x_0}(v) = \left. \frac{d}{ds} \exp_{x_0}(sv) \right|_{s=0}$$

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$. C'est une application lisse traditionnellement notée \exp_{x_0} . Par définition $\exp_{x_0}(v) = \Phi(1, x_0, v) = c_{x_0, v}(1)$.

Lemme 32

Pour tout $x \in U$, l'application \exp_{x_0} est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

Preuve : L'application \exp_{x_0} est lisse, il suffit donc de montrer que sa différentielle en 0 est inversible. Pour tout $v \in \mathbf{R}^2$, on a :

$$D_0 \exp_{x_0}(v) = \left. \frac{d}{ds} \exp_{x_0}(sv) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (c_{x_0, sv}(1)) \right|_{s=0}$$

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$. C'est une application lisse traditionnellement notée \exp_{x_0} . Par définition $\exp_{x_0}(v) = \Phi(1, x_0, v) = c_{x_0, v}(1)$.

Lemme 32

Pour tout $x \in U$, l'application \exp_{x_0} est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

Preuve : L'application \exp_{x_0} est lisse, il suffit donc de montrer que sa différentielle en 0 est inversible. Pour tout $v \in \mathbf{R}^2$, on a : (exercice 9) !

$$D_0 \exp_{x_0}(v) = \frac{d}{ds} \exp_{x_0}(sv) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} (c_{x_0, sv}(1)) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} c_{x_0, v}(s) \Big|_{s=0}$$

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$. C'est une application lisse traditionnellement notée \exp_{x_0} . Par définition $\exp_{x_0}(v) = \Phi(1, x_0, v) = c_{x_0, v}(1)$.

Lemme 32

Pour tout $x \in U$, l'application \exp_{x_0} est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

Preuve : L'application \exp_{x_0} est lisse, il suffit donc de montrer que sa différentielle en 0 est inversible. Pour tout $v \in \mathbf{R}^2$, on a : (exercice 9) !

$$D_0 \exp_{x_0}(v) = \frac{d}{ds} \exp_{x_0}(sv) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} (c_{x_0, sv}(1)) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} c_{x_0, v}(s) \Big|_{s=0} = v.$$

Ainsi $D_0 \exp_{x_0} = \text{Id}$. \square

On appelle application exponentielle de Σ en x_0 , la restriction de Φ à $\{1\} \times \{x_0\} \times W$. C'est une application lisse traditionnellement notée \exp_{x_0} . Par définition $\exp_{x_0}(v) = \Phi(1, x_0, v) = c_{x_0, v}(1)$.

Lemme 32

Pour tout $x \in U$, l'application \exp_{x_0} est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

Preuve : L'application \exp_{x_0} est lisse, il suffit donc de montrer que sa différentielle en 0 est inversible. Pour tout $v \in \mathbf{R}^2$, on a : (exercice 9) !

$$D_0 \exp_{x_0}(v) = \frac{d}{ds} \exp_{x_0}(sv) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} (c_{x_0, sv}(1)) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} c_{x_0, v}(s) \Big|_{s=0} = v.$$

Ainsi $D_0 \exp_{x_0} = \text{Id}$. \square

Autrement dit, l'application \exp_{x_0} définit des coordonnées locales au voisinage de x_0 .

Il ne s'agit pas encore des coordonnées cherchées, mais pas loin. Il faut en plus composer avec un passage en coordonnées polaires.

Soit (ξ_1, ξ_2) une base orthonormée de \mathbf{R}^2 munit du produit scalaire $\alpha_f(x_0)$

Il ne s'agit pas encore des coordonnées cherchées, mais pas loin. Il faut en plus composer avec un passage en coordonnées polaires.

Soit (ξ_1, ξ_2) une base orthonormée de \mathbf{R}^2 munit du produit scalaire $\alpha_f(x_0)$ (ie telle $(D_x f(\xi_1), D_x f(\xi_2))$ est une b.o.n. de $T_f(x)\Sigma$).

Il ne s'agit pas encore des coordonnées cherchées, mais pas loin. Il faut en plus composer avec un passage en coordonnées polaires.

Soit (ξ_1, ξ_2) une base orthonormée de \mathbf{R}^2 munit du produit scalaire $\alpha_f(x_0)$ (ie telle $(D_x f(\xi_1), D_x f(\xi_2))$ est une b.o.n. de $T_f(x)\Sigma$).

Pour $\rho > 0$ assez petit l'application Φ_0 définie sur $]0, \rho[\times]0, 2\pi[$ par

$$\Phi_0(r, \theta) = r(\cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2)$$

est un difféomorphisme d'image contenue dans W .

Il ne s'agit pas encore des coordonnées cherchées, mais pas loin. Il faut en plus composer avec un passage en coordonnées polaires.

Soit (ξ_1, ξ_2) une base orthonormée de \mathbf{R}^2 munit du produit scalaire $\alpha_f(x_0)$ (ie telle $(D_x f(\xi_1), D_x f(\xi_2))$ est une b.o.n. de $T_f(x)\Sigma$).

Pour $\rho > 0$ assez petit l'application Φ_0 définie sur $]0, \rho[\times]0, 2\pi[$ par

$$\Phi_0(r, \theta) = r(\cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2)$$

est un difféomorphisme d'image contenue dans W .

On définit maintenant des nouvelles coordonnées locales (V, g) sur Σ . On prend $V =]0, \rho[\times]0, 2\pi[$ et $g = f \circ \exp_x \circ \Phi_0$. On a maintenant les coordonnées cherchées !

Il ne s'agit pas encore des coordonnées cherchées, mais pas loin. Il faut en plus composer avec un passage en coordonnées polaires.

Soit (ξ_1, ξ_2) une base orthonormée de \mathbf{R}^2 munit du produit scalaire $\alpha_f(x_0)$ (ie telle $(D_x f(\xi_1), D_x f(\xi_2))$ est une b.o.n. de $T_f(x)\Sigma$).

Pour $\rho > 0$ assez petit l'application Φ_0 définie sur $]0, \rho[\times]0, 2\pi[$ par

$$\Phi_0(r, \theta) = r(\cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2)$$

est un difféomorphisme d'image contenue dans W .

On définit maintenant des nouvelles coordonnées locales (V, g) sur Σ . On prend $V =]0, \rho[\times]0, 2\pi[$ et $g = f \circ \exp_x \circ \Phi_0$. On a maintenant les coordonnées cherchées !

Montrons que α_g est de la forme voulue.

Soit γ_θ l'arc défini par $\gamma_\theta(r) = g(r, \theta)$. Par construction, il s'agit d'un arc géodésique. On a donc :

$$\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = \langle \gamma'_\theta(r), \gamma'_\theta(r) \rangle = \langle \gamma'_\theta(0), \gamma'_\theta(0) \rangle = \|\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2\|^2 = 1.$$

Soit γ_θ l'arc défini par $\gamma_\theta(r) = g(r, \theta)$. Par construction, il s'agit d'un arc géodésique. On a donc :

$$\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = \langle \gamma'_\theta(r), \gamma'_\theta(r) \rangle = \langle \gamma'_\theta(0), \gamma'_\theta(0) \rangle = \|\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2\|^2 = 1.$$

On veut maintenant montrer que $\langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$.

Soit γ_θ l'arc défini par $\gamma_\theta(r) = g(r, \theta)$. Par construction, il s'agit d'un arc géodésique. On a donc :

$$\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = \langle \gamma'_\theta(r), \gamma'_\theta(r) \rangle = \langle \gamma'_\theta(0), \gamma'_\theta(0) \rangle = \|\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2\|^2 = 1.$$

On veut maintenant montrer que $\langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_r \langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle &= \langle \partial_{rr}^2 g, \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= \langle \gamma''_\theta(r), \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2} \partial_\theta \langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = 0, \end{aligned}$$

puisque γ_θ est une géodésique et que $\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle$ est constant.

Soit γ_θ l'arc défini par $\gamma_\theta(r) = g(r, \theta)$. Par construction, il s'agit d'un arc géodésique. On a donc :

$$\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = \langle \gamma'_\theta(r), \gamma'_\theta(r) \rangle = \langle \gamma'_\theta(0), \gamma'_\theta(0) \rangle = \|\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2\|^2 = 1.$$

On veut maintenant montrer que $\langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_r \langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle &= \langle \partial_{rr}^2 g, \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= \langle \gamma''_\theta(r), \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2} \partial_\theta \langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = 0, \end{aligned}$$

puisque γ_θ est une géodésique et que $\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle$ est constant. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \partial_\theta g(r, \theta) &= \partial_\theta (f \circ \exp_x(r(\cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2))) \\ &= D(f \circ \exp_x)(\Phi_0(r, \theta)) \cdot (r(-\sin(\theta)\xi_1 + \cos(\theta)\xi_2)). \end{aligned}$$

Soit γ_θ l'arc défini par $\gamma_\theta(r) = g(r, \theta)$. Par construction, il s'agit d'un arc géodésique. On a donc :

$$\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = \langle \gamma'_\theta(r), \gamma'_\theta(r) \rangle = \langle \gamma'_\theta(0), \gamma'_\theta(0) \rangle = \|\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2\|^2 = 1.$$

On veut maintenant montrer que $\langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_r \langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle &= \langle \partial_{rr}^2 g, \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= \langle \gamma''_\theta(r), \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2} \partial_\theta \langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = 0, \end{aligned}$$

puisque γ_θ est une géodésique et que $\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle$ est constant. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \partial_\theta g(r, \theta) &= \partial_\theta (f \circ \exp_x(r(\cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2))) \\ &= D(f \circ \exp_x)(\Phi_0(r, \theta)) \cdot (r(-\sin(\theta)\xi_1 + \cos(\theta)\xi_2)). \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{r \rightarrow 0} \partial_\theta g(r, \theta) = 0$ et donc $\lim_{r \rightarrow 0} \langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$.

Soit γ_θ l'arc défini par $\gamma_\theta(r) = g(r, \theta)$. Par construction, il s'agit d'un arc géodésique. On a donc :

$$\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = \langle \gamma'_\theta(r), \gamma'_\theta(r) \rangle = \langle \gamma'_\theta(0), \gamma'_\theta(0) \rangle = \|\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2\|^2 = 1.$$

On veut maintenant montrer que $\langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_r \langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle &= \langle \partial_{rr}^2 g, \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= \langle \gamma''_\theta(r), \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2} \partial_\theta \langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = 0, \end{aligned}$$

puisque γ_θ est une géodésique et que $\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle$ est constant. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \partial_\theta g(r, \theta) &= \partial_\theta (f \circ \exp_x(r(\cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2))) \\ &= D(f \circ \exp_x)(\Phi_0(r, \theta)) \cdot (r(-\sin(\theta)\xi_1 + \cos(\theta)\xi_2)). \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{r \rightarrow 0} \partial_\theta g(r, \theta) = 0$ et donc $\lim_{r \rightarrow 0} \langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$. Or, d'après ce qui précède $\langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle$ ne dépend pas de r et donc α_g a bien la forme voulue! \square

Soit γ_θ l'arc défini par $\gamma_\theta(r) = g(r, \theta)$. Par construction, il s'agit d'un arc géodésique. On a donc :

$$\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = \langle \gamma'_\theta(r), \gamma'_\theta(r) \rangle = \langle \gamma'_\theta(0), \gamma'_\theta(0) \rangle = \|\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2\|^2 = 1.$$

On veut maintenant montrer que $\langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_r \langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle &= \langle \partial_{rr}^2 g, \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= \langle \gamma''_\theta(r), \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2} \partial_\theta \langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = 0, \end{aligned}$$

puisque γ_θ est une géodésique et que $\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle$ est constant. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \partial_\theta g(r, \theta) &= \partial_\theta (f \circ \exp_x(r(\cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2))) \\ &= D(f \circ \exp_x)(\Phi_0(r, \theta)) \cdot (r(-\sin(\theta)\xi_1 + \cos(\theta)\xi_2)). \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{r \rightarrow 0} \partial_\theta g(r, \theta) = 0$ et donc $\lim_{r \rightarrow 0} \langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$. Or, d'après ce qui précède $\langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle$ ne dépend pas de r et donc α_g a bien la forme voulue ! \square
ouf!

Corollaire 33

Les géodésiques sont exactement les courbes qui minimisent localement la longueur.

Corollaire 33

Les géodésiques sont exactement les courbes qui minimisent localement la longueur.

Si une courbe minimise globalement la longueur alors c'est une géodésique.

Corollaire 33

Les géodésiques sont exactement les courbes qui minimisent localement la longueur.

Si une courbe minimise globalement la longueur alors c'est une géodésique.

Autrement dit si 2 points sont suffisamment proches il existe un plus court chemin les reliant et ce chemin est un arc de géodésique.

Corollaire 33

Les géodésiques sont exactement les courbes qui minimisent localement la longueur.

Si une courbe minimise globalement la longueur alors c'est une géodésique.

Autrement dit si 2 points sont suffisamment proches il existe un plus court chemin les reliant et ce chemin est un arc de géodésique.

Preuve : Si y est suffisamment proche de x , alors il existe v tel que $y = \exp_x(v)$. En se plaçant dans les coordonnées données par le lemme de Gauss, on déduit de l'exercice 8 que le segment géodésique $t \mapsto \exp_x(tv)$ minimise la longueur.

Corollaire 33

Les géodésiques sont exactement les courbes qui minimisent localement la longueur.

Si une courbe minimise globalement la longueur alors c'est une géodésique.

Autrement dit si 2 points sont suffisamment proches il existe un plus court chemin les reliant et ce chemin est un arc de géodésique.

Preuve : Si y est suffisamment proche de x , alors il existe v tel que $y = \exp_x(v)$. En se plaçant dans les coordonnées données par le lemme de Gauss, on déduit de l'exercice 8 que le segment géodésique $t \mapsto \exp_x(tv)$ minimise la longueur.

Inversement si γ est le plus court chemin reliant deux points, il minimise aussi la longueur entre chacun de ses points. En les choisissant suffisamment proche on en déduit que γ est une géodésique. \square