Université Bordeaux 1 Année 2006-2007

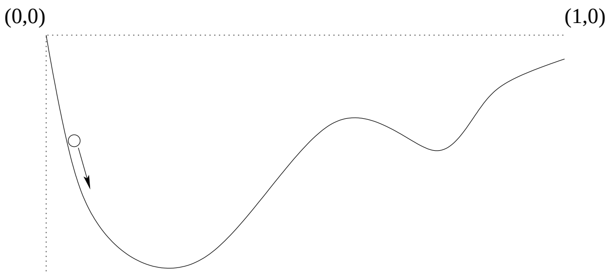
L3 Mathématiques

Calcul différentiel

Un exemple de fonctionnelle lagrangienne, exercice 7 feuille 3

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0)=0$, muni de la norme C^1 (voir énoncé). Soit U l'ouvert de E composé des fonctions f telle que $f'_d(0)<0$ et $\forall x \in]0,1],\ f(x)<0$.

On définit une fonctionnelle $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$ qui à une fonction f associe le temps mis par une bille soumise à la seule pesanteur pour parcourir, sans frotements, le graphe de f (il faut imaginer une rampe).



On veut montrer qu'il existe $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{F}(f) = \int_0^1 \mathcal{L}(x, f(x), f'(x))\, dx.$$

Soit t le temps. Au temps $t=0$ la bille est lachée sans vitesse initiale au point $(0,0)$. Si on note y l'altitude la bille, m sa masse et g la constante de gravitation, la loi de conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgy \text{ ou } v = \sqrt{-2gy}. \quad \text{(la masse a judicieusement disparu)}$$

Au temps t la bille a pour coordonnées $(x(t), y(t))$. Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont différentiables car solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 (somme des forces=masse $\times$ accélération). Le point étant sur le graphe on a $y(t) = f(x(t))$.

Remarquons que le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v}(t) = x'(t)(1, f'(x(t))$. On voit ainsi que $x'(t)$ ne s'annule que lorsque $v = \|\vec{v}\| = 0$ c'est-à-dire en 0. La fonction $t \mapsto x(t)$ est strictement croissante.

Si on note T le temps mis pour parcourir la courbe, on voit que cette fonction est une bijection de $[0,T]$ dans $[0,1]$ et que la bijection réciproque $x \mapsto t(x)$ est continue, différentiable partout sauf en 0. De plus $t'(x) = \dfrac{1}{x'(t(x))}$.

Par ailleurs, on sait que $v = x'(t)\sqrt{1+f'(x)^2}$ d'où

$$t'(x) = \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{v} = \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{-2g\, f(x)}}.$$

On connait t' pour connaître T il suffit d'intégrer :

$$T = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{-2g\, f(x)}}\, dx.$$

Remarquons que l'on a affaire à une intégrale généralisée. Elle converge en 0 car $f'(0)<0$ (sinon la bille ne part pas). Si on autorise $f(1)=0$ elle converge en 1 si $f'(1) \neq 0$.

Si on pose $\mathcal{L}(u,v,w) = \sqrt{\frac{1+w}{-2g\, v}}$, on voit que la fonctionnelle qui à f associe T est bien de la forme demandée. On peut aussi autoriser $f(0) \leq 0$ ce qui correspond à donner une vitesse initiale (par la relation $v = \sqrt{-2gy}$).

Cette fonctionnelle est utilisée pour déterminer quelle est la courbe reliant deux points donnés qui est parcourue le plus rapidement. Cette courbe est appelée brachistochrone et ce n'est pas la ligne droite.