Université Bordeaux 1 — Année 2008-2009

L3 Mathématiques

Calcul différentiel, feuille1

Espaces normés.

Exercice 1. Faire un dessin résumant le fait que les normes de $\mathbb{R}^2$ habituelles : $\| \,.\, \|_1$, $\| \,.\, \|_2$ et $\| \,.\, \|_\infty$ sont équivalentes. Prouver l'équivalence.
Prouver que deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $\| \,.\, \|$ une application de E dans $\mathbb{R}^+$ ne s'annulant qu'en 0_E vérifiant $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$.

Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur E si et seulement si l'ensemble $\{x \in E \; ; \|x\| \leq 1\}$ est convexe.

Application : $\|x_1, \ldots, x_n\|_p = (\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p)^{1/p}$ définit une norme si et seulement si $p \geq 1$ [on utilisera la convexité de la fonction $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $p \geq 1$].

Comment définir une norme simplement en se donnant un voisinage convexe, compact et symétrique de 0 ?

Exercice 3. a) Soit T l'application de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}, |.|)$ définie par :

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, x_k,$$

où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que T est linéaire continue et calculer sa norme (on parle de norme duale).

b) Recommencer en considèrant cette fois T comme une application de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_2)$ dans $(\mathbb{K}, |.|)$.

Exercice 4. Si L est une application linéaire de $(\mathbb{R}^n, \| \,.\, \|_p)$ dans $(\mathbb{R}^n, \| \,.\, \|_q)$, on note sa norme $\|L\|_{p,q}$.

a) On prend ici $n = 2$. Soit L l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Dessiner les images par L des boules unités pour les normes $1, 2$ et ∞. En déduire $\|L\|_{p,q}$ lorsque p et q varient dans $\{1, 2, \infty\}$.

b) Soit L l'endomorphisme $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Donner l'expression de $\|L\|_{1,1}$ et de $\|L\|_{\infty,\infty}$ en fonction des a_{ij}.

c) Lorsque A est symétrique donner $\|L\|_{2,2}$ [on commencera par le cas diagonal]. **En déduire une expression de $\|L\|_{2,2}$ dans le cas général [Indication : on utilisera $\|(AA^t)\|_{2,2}$].**

Exercice 5. a) Soit T l'application de $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(f) = f(c)$ où c est un réel de l'intervalle $[0, 1]$. E est muni de la norme L^1 c'est-à-dire : $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$.

Montrer que T n'est pas continue. Est-ce que T est continue si E est muni de la norme $\|.\|_\infty$?

b) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit φ un élément de E fixé. Soit T l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$T(f) = \int_0^\pi \varphi(x) f(x) dx.$$

Démontrer que T est linéaire continue. Calculer sa norme lorsque $\varphi(x) \geq 0$ et lorsque $\varphi(x) = \cos(x)$.