Université Bordeaux 1 Année 2008-2009
L3 Mathématiques

Calcul différentiel, feuille 2
DIFFÉRENTIELLES.

$(E, \|.\|)$ désignera un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E muni de la norme d'opérateur.

Exercice 1. a) Soit $\varphi : (E_1 \times \cdots \times E_n, \|.\|) \to (F, \|.\|')$ une application n-linéaire continue. Montrer que φ est différentiable et calculer sa différentielle.

b) Étudier la différentiabilité des applications suivantes :
- $\varphi_p : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto u^p \; ; p \in \mathbb{N}$
- $\psi : (u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \mapsto u^2 v^3$.

c) On suppose maintenant que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel *euclidien*. Montrer que les applications suivantes sont différentiables et écrire leurs différentielles.

$$\begin{array}{rcl} E \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} (E \times E) \setminus \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array},$$

où Δ désigne la diagonale de $E \times E$.

Exercice 2. Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien et soit u un élément de $\mathcal{L}(E)$. On définit une application f_u de E dans $\mathbb{K}$ par $f_u(x) = \langle u(x), x \rangle$. Étudier la différentiabilité de f et donner sa différentielle.

Application (DS 31/10/2006) : Soit $\mathcal{M}_n$ l'espace des matrices carrées réelles d'ordre n et $u : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ une application linéaire. Montrer que $f : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \mathrm{tr}(u(A)^t A)$ est differentiable et donner sa différentielle.

Exercice 3. a) Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une application différentiable en $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $Df(a).1 = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$. En déduire pour $g : E \to F$ différentiable en $a \in E$ et $h \in E$ une expression de $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(a+th) - g(a))$ (la dérivée de g en a dans la direction de h) en fonction de $Df(a)$.

b) Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Dériver les fonctions $u(x) = f(x,x)$, $v(x,y) = f(y,x)$ et $w(x,y) = f(y-x, x)$.

Exercice 4. Soit f et g les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elles admettent des dérivées directionnelles en $(0,0)$ dans toutes les directions. Sont-elles différentiables en $(0,0)$?

Exercice 5. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer que N n'est pas différentiable en 0. Montrer que si N est différentiable en x alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $DN(\lambda x) = DN(x)$. et que $DN(x).x = N(x)$ et en déduire $\|DN(x)\| = 1$.
Où la norme $\|.\|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ est-elle différentiable ?

Exercice 6. Soit F l'espace des fonctions continues de $I = [0,1]$dans $\mathbb{R}$ et E l'espace des fonctions de classe C^1 nulles en 0. On munit F de la norme $\|x\| = \sup_{t\in I} |x(t)|$ et E de $\|x\|_1 = \sup_{t \in I} |x'(t)|$. Montrer que l'application $f : E \to F$ définie par $f(x) = x' + x^2$ est de classe C^1 sur E et calculer sa différentielle en tout point.
Même question pour $g : E \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_0^1 f(x)(t)dt$.

Exercice 7. Soit E un espace de Banach. On désigne par $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes E et par I l'application identité.

a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$, on a $\|A\| < 1$ entraine que $I - A$ est inversible d'inverse $\sum_{n\geq 0} A^n$. En déduire que $\mathrm{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

b) Soit $\mathcal{I} : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}(E)$ définie par $\mathcal{I}(T) = T^{-1}$. Montrer que cette application est différentiable et que

$$D\mathcal{I}(T).H = -T^{-1}HT^{-1}.$$

[on commencera par étudier la situation en I]

c) Cette application est-elle de classe C^1 ?