Université Bordeaux 1 — Année 2008-2009

L3 Mathématiques

Calcul différentiel, feuille 3

Inégalité des accroissements finis.

Exercice 1. Montrer qu'une application différentiable définie sur ouvert connexe est constante si et seulement si sa différentielle est nulle en tout point.

Exercice 2. Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante et dérivable. On suppose que $f(x)$ croît vers $+\infty$ et que $f'(x)$ décroit vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que la suite $(e^{if(n)})_n$ est dense sur le cercle unité. [on pourra comparer $e^{if(x)}$ et $e^{if(E(x))}$, où on a noté $E(x)$ la partie entière de x.]

Exercice 3. Soit E et F des espaces vectoriels normés et Ω est un ouvert convexe de E. Soit $f : \Omega \to F$ une application à différentielle bornée.

a) Montrer que f est lipschitzienne sur Ω.

b) Ce résultat subsiste-t-il si $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$? et si $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$?

c) Application. Montrer que la suite définie par l'itération $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n, \sin x_n - \cos y_n)$ converge pour tout (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa limite ?

Exercice 4. Soit E et F deux espaces normés, Ω un ouvert de E, f une application continue de Ω dans F différentiable sur $\Omega \setminus \{a\}$ et telle que $\lim_{x\to a,\, x\neq a} Df(x) = L$ existe dans $\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $\|f(a+h) - f(a) - L(h)\| \leq \|h\|\varepsilon(h)$ où ε est une fonction de limite nulle en 0 ; en déduire que $Df(a)$ existe et est égale à L.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$ et $Df(0) =$Id. Pour tout $t \in]0,1]$ on pose $f_t(x) = \frac{1}{t} f(tx)$. Montrer que lorsque $t \to 0$, l'application f_t tend vers l'identité uniformément sur tout compact. Calculer Df_t et montrer que, lorsque $t \to 0$, Df_t tend vers une application constante uniformément sur tout compact.

Exercice 6. Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

a) Montrer que pour tout $\in E$, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $B_R = \{X \in E | \|X\| \leq R\}$. On note $\exp(A)$ la somme de cette série.

b) En déduire que l'application $f : E \to E$ définie par $f(A) = \exp(A)$ est continue. Montrer que f est différentiable et majorer $\|Df(A)\|$ pour $A \in B_R$. L'application f est-elle C^1 ?

c) Donner une expression de $Df(A)H$ lorsque A et H commutent.

Exercice 7. Le ω-lemme. Soit $f : E \to F$ une application de classe C^r entre deux espaces de Banach. On note $\mathcal{E} = C^0([0,1], E)$ et $\mathcal{F} = C^0([0,1], F)$ chacun munit de la norme C^0 :

$$\|\gamma\|_{C^0} = \sup_{t\in[0,1]} \|\gamma(t)\|.$$

Soit $c : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ l'application définie par $c(\gamma) = f \circ \gamma$. Montrer que l'application est différentiable et que

$$Dc(\gamma).h = (Df \circ \gamma).h := [t \mapsto Df(\gamma(t)).h(t)].$$

Montrer que c est de classe C^1.

[On pourra appliquer la forme intégrale de l'inégalité des accroissements finis à f et le fait qu'une fonction continue est uniformément continue *le long* de tout compact.]