Université Bordeaux 1 — Année 2008-2009
L3 Mathématiques

Calcul différentiel, feuille 5
Différentielles secondes, formules de Taylor.

Exercice 1. a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Exprimer $D^2 f(x).(h,k)$ en fonction des dérivées partielles secondes de f. Faire le calcul pour $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

b) Donner la différentielle seconde d'une application trilinéaire continue entre deux espaces vectoriels normés.

Exercice 2. Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application deux fois différentiable.

a) Soit $k \in E$ et $D_k f : E \to F$ l'application définie $D_k f(x) = Df(x).k$. Montrer que pour tout $(h,k) \in E^2$, $D^2 f(x).(h,k) = D(D_k f)(x).h$

b) Soit a, h et k dans E et soit $psi : \mathbb{R}^2 \to F$ définie par $\psi(s,t) = F(a + sh + tk)$. Calculer $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s(0,0)}$.

c) Soit G un troisième espace normé et $g : F \to G$ deux fois différentiable. Développer $D^2(g \circ f)(x).(h,k)$. En déduire une autre preuve de 1.a), généraliser à $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3. Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une application de classe C^2 de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ dans lui-même. On dit que f est une *isométrie infinitésimale* si pour tous $x, h, k \in \mathbb{R}^n$, $\langle Df(x)h, Df(x).k \rangle = \langle h, k \rangle$.

a) On suppose que f est une isométrie infinitésimale, et on note

$$a_{ijk} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} . \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k}, \ 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Montrer que $a_{ijk} = a_{ikj}$ et $a_{ijk} = -a_{kji}$. En déduire $a_{ijk} = 0$ pour tous i, j et k.

b) Déduire de a) que f est une application linéaire orthogonale.

Exercice 4. Soit E et F deux espaces de Banach et f une application 2 fois différentiable en 0 telle que $f(tx) = t^2 f(x)$ pour tout $x \in E$ et tout réel t. Démontrer que

$$D^2 f(0,0)(x,x) = 2\, f(x)$$

en dérivant deux fois la relation $f(tx) = t^2 f(x)$, par rapport à t. Quelles sont les normes dont le carré est deux fois différentiable en 0 ?

Exercice 5. a) Soit E un espace de Banach. Soit $\mathcal{I}$ l'application de $GL(E)$ dans lui-même qui a u associe u^{-1}. Déduire du fait que l'application $\mathcal{I}$ est de classe C^1 (cf. feuille 2) le fait que $\mathcal{I}$ est de classe C^∞ (on dit aussi lisse).

b) Soit $f : U \to V$ une bijection où U et V sont des ouverts d'espaces de Banach. Montrer que si f est C^r et f^{-1} est différentiable alors f^{-1} est C^r [Rappelons que $Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}$].

Exercice 6. Écrire les formules de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de $(0,0)$ pour la fonction

$$f(x,y) = e^{ax+by} - \cos(cx + dy).$$

Existe-t-il des réels a, b, c, d tels que f garde un signe constant au voisinage de $(0,0)$?

Écrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 3 d'une fonction de deux variables.

Exercice 7. Soit f une application lisse définie sur un ouvert connexe U et n un entier tel que $D^n f = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application lisse. On suppose que :

$$f(0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \cdots = \frac{\partial^{r-1} f}{\partial x^{r-1}}(0,y) = 0 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'il existe une fonction lisse g telle que $f(x,y) = x^r g(x,y)$.

Exercice 9. a) Déterminer les extrema des fonctions $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

- $f_1(x,y) = (x+y)^3 - y^2 - 3(x+y)$
- $f_2(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$
- $f_3(x,y) = (x-y)^3 + x^4 + y^4$

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = 0$ et telle qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ avec $f(x_0,y_0) > 0$ (resp. < 0). Montrer que f admet un maximum (resp. minimum) sur $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Déterminer les extrema de f et préciser leur nature.

Exercice 10. On considère E l'espace vectoriel des suites de réels $x = (x_n)_{n\geq 1}$ telles que $\sum_{n\geq 1} x_n^2 < +\infty$. On structure E en espace de Hilbert réel grâce au produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{n\geq 1} x_n y_n$.

a) Montrer que pour toute suite $x = (x_n)_{n\geq 1}$ élément de E, la série de terme général $\frac{x_n^2}{n} - x_n^3$ est convergente. On considére dorénavant l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n^2}{n} - x_n^3$.

b) Montrer que f est lisse (C^∞) sur E. Déterminer la différentielle de f en tout point et vérifier que 0 est un point critique de f.

c) Montrer que $D^2 f(0)(h,h) > 0$ pour tous $h \in E \setminus \{0\}$.
On considère $\varepsilon > 0$ et on définit $x = (x_n)_{n\geq 1}$ par $x_{n_0} = \varepsilon/2$ et $x_n = 0$ si $n \neq n_0$, où l'on a choisi $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > 2/\varepsilon$. Montrer que $f(x) < 0 = f(0)$. En déduire que 0 n'est pas un minimum local de f. Conclure.