Université Bordeaux 1 Année 2008-2009
L3 Mathématiques

Calcul différentiel, feuille 4

Inversion locale et fonctions implicites.

Exercice 1. a) Soit U le plan privé de l'origine, et $f : U \to U$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.

b) Même question avec $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$.

c) Soit f définie par $f(x) = x + x^2 \sin \frac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f'(0)$ existe et est différent de 0, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

Exercice 2. a) Montrer que si a, b sont voisins de 1, on peut trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y + e^{xy} = a,\ x + e^{-xy} = b$.

b) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f(x, y) = (x \sin(xy) + y, y \cos(xy) + x)$, et soit (a_n, b_n) une suite tendant vers $(0, 0)$. Montrer que si $f(a_n, b_n) = 0$ pour tout n, la suite (a_n, b_n) stationne.

c) Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et I la matrice unité dans E. En considérant $\varphi : E \to E$ telle que $\varphi(A) = A^2$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $\|A - I\| < \alpha$ admette une racine carrée (même question pour $\varphi(A) = \exp(A)$)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout h, x dans $\mathbb{R}^n$,

$$\langle Df(x).h, h\rangle \geq \alpha \langle h, h\rangle. \quad (*)$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x)$ est inversible. En déduire que f est une application ouverte.

b) En considérant la fonction $t \mapsto \langle f(a + t(b - a), b - a\rangle$, montrer que pour tout a, b dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle f(b) - f(a), b - a\rangle \geq \alpha \langle b - a, b - a\rangle.$$

En déduire que f est injective et que f est une application fermée (variante : en déduire que la fonction $g(x) = \|f(x) - y_0\|^2$ atteint sa borne inférieure en un point x_0 et calculer $Dg(x_0)$).

c) Conclure que f est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

Recommencer en remplaçant $(*)$ par $\|f(x) - f(y)\| \geq \alpha\|x - y\|$ (il faut bien sûr modifier la question b).

Exercice 4. a) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et C l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0$.

En quels points (a, b) peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites ? Calculer la dérivée de la fonction implicite lorsqu'elle existe et écrire l'équation de la tangente à C.

b) Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité à l'ordre 3 en 0.

c) Montrer que les équations $x + y - zt = 0,\ xy - z + t = 0$ définissent au voisinage de $(0, 1)$ deux fonctions implicites $x = \varphi_1(z, t),\ y = \varphi_2(z, t)$ avec $\varphi_1(0, 1) = 1$, dont on calculera les différentielles en ce point.

Exercice 5. On considère le système d'équations d'inconnues x et y :

$$x = \frac{1}{2}\sin(x + y) + t - 1, \quad y = \frac{1}{2}\cos(x - y) - t + \frac{1}{2}.$$

a) Montrer que pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution (x_0, y_0), et que la fonction ainsi définie est continue..

b) Montrer en considérant la fonction $F(x, y, t) = (x - \frac{1}{2}\sin(x + y) + t - 1, \quad y - \frac{1}{2}\cos(x - y) - t + \frac{1}{2})$, que le système admet une unique solution $x = x(t),\ y = y(t)$ constituée de fonctions C^∞.

c) Donner un développement limité à l'ordre 2 de $x(t), y(t)$ au point $(0,0)$.

Exercice 6. On considère $E = M_n(\mathbb{R})$, $F = GL(n, \mathbb{R})$ et l'application Ψ de $F \times E$ dans E définie par $\Psi(A, B) = AB - I$. Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que $\varphi : A \in F \to A^{-1}$ est différentiable en tout point de F et retrouver sa différentielle.

Exercice 7. Soit $d \in \mathbb{N}^*$; on note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à d. On rappelle que $r \in \mathbb{R}$ est une racine simple de $P \in E$ si $P(r) = 0$ et $P'(r) \neq 0$. Considérons l'application $F : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(P, x) = P(x)$.

a) Montrer que les dérivées partielles $D_1F(P_0, r_0) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $D_2(P_0, r_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existent pour tout $(P_0, r_0) \in E \times \mathbb{R}$ et déterminer leurs expressions. En déduire que F est de classe C^1 sur $E \times \mathbb{R}$.

b) Soit r_0 une racine simple de P_0.
Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de (P_0, r_0), un voisinage ouvert W de P_0, une fonction $\varphi : W \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur W, tels que :

$$(P, r) \in V \text{ et } P(r) = 0 \text{ si et seulement si } P \in W \text{ et } r = \varphi(P).$$

Montrer que l'on peut choisir V assez petit pour que $P'(\varphi(P)) \neq 0$ pour tout $P \in W$, c'est-à-dire pour que $r = \varphi(P)$ soit une racine simple. Quelle est la différentielle en P_0 de φ ?