Université Bordeaux 1 — Année 2007-2008

L3 Mathématiques

Calcul différentiel, feuille 6

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(t,x) = x^2$. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(t,x) = 2\sqrt{|x|}$ et $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$; $g(t;x) = 2\sqrt{x}$. Soit aussi a, b deux réels tels que $a < b$. On considère la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} -(t-a)^2 & \text{si } t < a \\ 0 & \text{si } a \leq t \leq b \\ (t-b)^2 & \text{si } t > b \end{cases}.$$

Démontrer que φ est solution de l'équation différentielle $x' = f(t;x)$. Que peut on dire au sujet de l'unicité des solutions des équations $x' = f(t,x)$ et $x' = g(t,x)$?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(t,x) = t\,x^2$. Étudier les solutions maximales de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ en fonction de la donnée initiale (t_0, x_0).

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne et l'équation différentielle $(*)$ $x' = f(x)$.

a) Supposons que α_1 et α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) sont deux zéros de f et que f ne s'annule pas sur l'intervalle $]\alpha_1;\alpha_2[$ et soit $(t_0;x_0) \in \mathbb{R}\times]\alpha_1;\alpha_2[$. Montrer que la solution maximale de $(*)$ de condition initiale $(t_0;x_0)$ est définie sur $\mathbb{R}$, monotone et déterminer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) On suppose que α est un zéro de f et que $f(x) > 0$ pour tout $x > \alpha$. Montrer que la solution maximale γ de $(*)$ de condition initiale $(t_0;x_0) \in \mathbb{R}\times]\alpha,+\infty[$ est définie sur un intervalle $I =]-\infty;t^+[$ où $t^+ \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que t^+ est fini si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{du}{f(u)}$ converge et montrer que $\lim\limits_{t\to t^+} \gamma(t) = +\infty$.

Exercice 5. On considère $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | x > t^2\}$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}$; $F(t,x) = \dfrac{1}{x-t^2}$.

a) Montrer que F est localement lipschitzienne en x sur Ω.
On considère dans la suite l'équation différentielle $(*)$ $x' = F(t,x)$.
Soit $(I;\varphi)$ une solution maximale de $(*)$.

b) Soit $t_0 \in I$ et soit $x_0 = \varphi(t_0)$: Montrer que $t > -\sqrt{x_0}$ pour $t \in I, t < t_0$. En déduire que $a = \inf I > -\infty$.

c) Montrer que φ admet une limite l quand $t \to a$; $t > a$.

d) Prouver que $l = a^2$.

e) Soit maintenant $(J;\psi)$ une autre solution maximale de $(*)$ telle que $t_0 \in J$. Montrer que si $\psi(t_0) > \varphi(t_0)$, alors $\inf J \leq a = \inf I$.

Exercice 6. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2+y^2) \\ y' = x + y(x^2+y^2) \end{cases}.$$

Soit (x_0, y_0) un point distinct de l'origine et soit $\gamma :]t^-, t^+[\to \mathbb{R}^2$ la solution maximale du système telle que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$. Soit $H(x,y) = x^2 + y^2$ et $h = H \circ \gamma$.

a) Exprimer $h'(t)$ en fonction de $\gamma(t)$. En déduire que $t^- = -\infty$.

b) Montrer que h est un difféomorphisme : $h :]t^-, t^+[\longrightarrow]u_-, u_+[$.
Calculer le difféomorphisme réciproque $t = k(u)$. Montrer que $u_- = 0$.

c) Montrer que t^+ est fini. En déduire que $u_+ = +\infty$. Donner l'allure des orbites.

Exercice 7. On appelle intégrale première d'un système différentiel $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n), 1 \leq i \leq n$ toute fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout x

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = 0.$$

a) Montrer que pour toute solution $x(t)$ du système différentiel la fonction $t \mapsto F(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ est constante.

b) Soit $\beta \in \mathbb{R}^*$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que le système différentiel $x' = Ax$ admet une intégrale première. En déduire l'allure des solutions puis les solutions elles-mêmes.

Exercice 8. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -2y \\ y' = 2x + 4x^3 \end{array} \right. .$$

a) Montrer que $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $E(x, y) = x^2 + y^2 + x^4$ est une intégrale première du système.

b) Soit $\varepsilon > 0$, on considère dans $\mathbb{R}^2$ le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -2y \\ y' = x + 4x^3 + \varepsilon y \end{array} \right. .$$

Soit γ une solution maximale du système montrer que E est croissante le long de γ (cad $E \circ \gamma$ est croissante). En déduire que γ est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lll} x' = 2x + y & + \cos t \\ y' = 3x + 4y & +t \end{array} \right. .$$

En déduire $\exp(tA)$, où A est la matrice associée au système.

Exercice 10. Calculer $\exp(tA)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + y' + y = 0$$

a) Résoudre l'équation différentielle (E) et étudier le comportement des solutions en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f''+f'+f$ soit T-périodique. Montrer que $f(x+T)-f(x)$ est solution de (E). En déduire que si f est bornée sur $\mathbb{R}$, f est elle-même T-périodique.

Exercice 12. Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x'' = x - 3y \\ y' = x - y \end{array} \right. .$

Exercice 13. On considère le système différentiel suivant sur $I =]0, +\infty[$

$$E = \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \frac{2}{t}x(t) - \frac{1}{t^2}y(t) \\ y'(t) = 2x(t) \end{array} \right. .$$

a) On pose $M(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice fondamentale de E. En déduire l'expression de la solution de E telle que $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$, où $t_0 \in I$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (on donnera la resolvante).

b) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \frac{2}{t}x(t) - \frac{1}{t^2}y(t) + t \\ y'(t) = 2x(t) + t^2 \\ x(1) = 0, y(1) = 0 \end{array} \right. .$$

Exercice 14. On considère le système différentiel suivant sur $I =]0, +\infty[$

$$E = \left\{ \begin{array}{l} x' = -\frac{t}{1+t^2}x + \frac{1}{1+t^2}y \\ y' = \frac{1}{1+t^2}x + \frac{t}{1+t^2}y \end{array} \right. ,$$

et le problème de Cauchy (C) associé de condition initiale $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$.

a) Que peut on dire des solutions maximales de (C) ? Déterminer les solutions affines de E. En déduire la solution maximale de C lorsque $t_0 = 1$ et $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

b) On désigne par X_{t_0,x_0,y_0} la solution de (C) et par $\mathcal{R}$ la résolvante de E. Donner $\det \mathcal{R}$ sans calculer $\mathcal{R}$. Donner les solutions de E de la forme $X(t) = (u(t), tu(t) + v(t))$ où u et v sont deux fonctions numériques.

c) Déduire de ce qui précède X_{t_0,x_0,y_0} et $\mathcal{R}$