

Cours de Géométrie Différentielle L3

2006-2017

Pierre Mounoud

16 janvier 2020

Bibliographie

- [1] Michèle Audin, *Géométrie*, Collection enseignement sup, EDP sciences 2006
- [2] Marcel Berger, Bernard Gostiaux , *Géométrie Différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses universitaires de France, 2eme édition corrigée - 1992
- [3] Henri Cartan, *Formes différentielles. Applications élémentaires au calcul des variations et à la théorie des courbes et des surfaces*. Hermann, Collection Méthodes, 1967.
- [4] Manfredo Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [5] Manfredo Do Carmo, *Differential forms and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [6] Wolfgang Kühnel, *Differential geometry. Curves – surfaces – manifolds*, Student Mathematical Library, 16. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002
- [7] Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Collection Grenoble science, EDP sciences 1996
- [8] Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1965.

Chapitre 1

Courbes, étude locale.

On se place dans \mathbb{R}^n que l'on munit du produit scalaire canonique (celui pour lequel la base canonique est orthonormée) que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ et d la norme et la distance associées. Dans ce chapitre, lorsque l'on considèrera une distance, il s'agira toujours de celle-ci.

1.1 Arcs paramétrés, arcs géométriques.

Définition 1.1.1 1) On appelle arc paramétré de classe C^k ($0 \leq k \leq \infty$) de \mathbb{R}^n , un couple (I, f) où I est un intervalle ouvert et f est une application de classe C^k de I dans \mathbb{R}^n .

On aimerait pouvoir séparer les propriétés du paramétrage des propriétés de la courbe proprement dite. Autrement dit, ce n'est pas la façon de parcourir le chemin qui nous intéresse mais le chemin lui même.

Définition 1.1.2 On dit que deux arcs paramétrés de classe C^k (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique (de classe C^k) A s'il existe un difféomorphisme θ de J dans I de classe C^k tel que $g = f \circ \theta$. Le sous-ensemble $f(I)$ est appelé le support de A .

On rappelle que $\theta : J \rightarrow I$ est un difféomorphisme de classe C^k , $k \geq 1$ si et seulement si θ est surjective de classe C^k et vérifie $\forall t \in J, \theta'(t) \neq 0$ (et donc $\theta' > 0$ ou $\theta' < 0$ sur tout J).

On dit que A est un arc géométrique paramétré par (I, f) (ou (J, g)) et que θ est un changement de paramétrage.

Remarque : Si (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique alors $f(I) = g(J)$ mais la réciproque est fautive. Il existe des arcs paramétrés ayant même support mais ne définissant pas le même arc géométrique, comme le montre la figure 1.1.

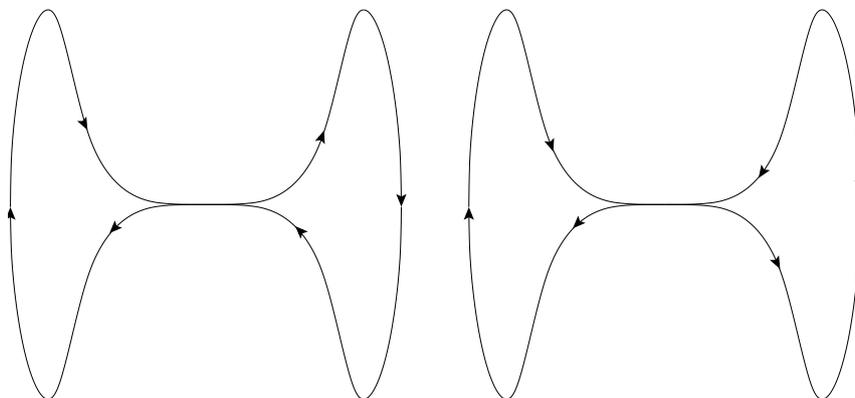


FIGURE 1.1 – Deux arcs différents ayant même support.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Montrer que les arcs $(I =]0, 3\pi[, f|_I)$ et $(J =]0, 5\pi[, f|_J)$ ont même support mais ne définissent pas le même arc géométrique.

Définition 1.1.3 On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique orienté si f est obtenu à partir de g par un changement de paramétrage croissant.

Sur un arc géométrique orienté on se souvient en plus du sens dans lequel la courbe est parcourue.

Remarque : La relation « (I, f) et (J, g) définissent un même arc (orienté ou non) » est une relation d'équivalence sur l'espace des arcs paramétrés. Ainsi un arc géométrique (orienté ou non) est une classe d'équivalence d'arcs paramétrés. De même, un point d'un arc géométrique est aussi une classe d'équivalence :

Définition 1.1.4 Un point d'un arc géométrique A est une classe d'équivalence de triplets (I, f, t) où (I, f) est un paramétrage de A et $t \in I$, pour la relation d'équivalence $(I, f, t) \sim (J, g, s)$ s'il existe un changement de paramétrage θ tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(s)$. L'élément commun $f(t) = g(s)$ est l'image du point.

La notation (I, f, t) étant trop lourde, on dira simplement soit $p = f(t)$ un point de A . On fera attention cependant à ne pas confondre un point et son image. Les arcs de la figure 1.1 possèdent des points distincts ayant même image.

Sauf mention contraire, les applications considérées dans la suite seront toujours lisses, c'est-à-dire de classe C^∞ . On omettra donc l'adjectif « lisse » dans les expressions « arc paramétré lisse » et « arc géométrique lisse ».

1.2 Tangente, plan osculateur.

Définition 1.2.1 Soient A un arc géométrique défini par le paramétrage (I, f) et $p = f(t)$ un point de A .

- Si $f'(t) \neq 0$, on dit que p est un point régulier de A .
- La droite passant par p et de vecteur directeur $f'(t)$ est alors appelée la tangente en p à A .
- Si tous les points de A sont réguliers, on dira que A est régulier.

Ces propriétés ne dépendent heureusement pas du paramétrage choisi. En effet, soit (I, f) et (J, g) deux paramétrages de A et $\theta : I \rightarrow J$ le changement de paramétrage associé (c-à-d. l'application vérifiant $f = g \circ \theta$). Pour tout $t \in J$, on a

$$f'(t) = (g \circ \theta)'(t) = \theta'(t)g'(\theta(t)).$$

Comme $\theta'(t) \neq 0$, on voit donc que $f'(t) \neq 0$ si et seulement si $g'(\theta(t)) \neq 0$ et que les vecteurs $f'(t)$ et $g'(\theta(t))$ sont colinéaires.

Dans la suite, on va très souvent se limiter à l'étude des arcs réguliers. D'une part cela exclure les points de rebroussement et autres singularités et d'autre part cela va limiter beaucoup le nombre d'arcs ayant un même support.

Exercice 2 — Soient $k \in \mathbb{N}$ et (I, f) un paramétrage d'un arc régulier. Soit I_k l'image réciproque de I par $\rho_k : t \mapsto t^{2k+1}$. Montrer que si $0 \in I$ et si $k \neq k'$ alors $(I_k, f \circ \rho_k)$ et $(I_{k'}, f \circ \rho_{k'})$ ne définissent pas le même arc géométrique.

- Soient A et B deux arcs géométriques réguliers dont le support est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. Montrer que $A = B$.
- Étendre ce résultat à tout arc dont le support est l'image de D par un difféomorphisme (lisse) de \mathbb{R}^2 .

Par contre les deux arcs de la figure 1.1 peuvent être vus comme des arcs réguliers distincts ayant même support.

Définition 1.2.2 Soient A un arc géométrique régulier, (I, f) un paramétrage de A et $p = f(t)$ un point de A .

- Un point p est dit *birégulier* si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants. Sinon on dit qu'il s'agit d'un point d'inflexion.
- Si p est birégulier, le plan engendré par $f'(t)$ et $f''(t)$ est appelé le plan osculateur à A au point p .
- Si tous les points de A sont biréguliers alors A est dit *birégulier*.

Vérifions à nouveau, que tout ceci ne dépend pas du choix du paramétrage :

Soient (I, f) et (J, g) deux paramétrages de A et θ le changement de paramétrage associé. On se place en un point $p = f(t) = g(s)$ avec $s = \theta(t)$. D'après la règle de dérivation des applications composées, on a :

$$\begin{aligned} f''(t) &= (g \circ \theta)''(t) = \theta'(t)^2 g''(\theta(t)) + \theta''(t) g'(\theta(t)) = \theta'(t)^2 g''(s) + \theta''(t) g'(s); \\ g''(s) &= (f \circ \theta^{-1})''(s) = (\theta^{-1})'(s)^2 f''(\theta^{-1}(s)) + (\theta^{-1})''(s) f'(\theta^{-1}(s)). \end{aligned}$$

On a donc $f''(t) \in \text{Vect}(g'(s), g''(s))$ et $g''(s) \in \text{Vect}(f'(t), f''(t))$. On vient de voir que $f'(t)$ et $g'(s)$ sont colinéaires donc $\text{Vect}(f'(t), f''(t)) = \text{Vect}(g'(s), g''(s))$.

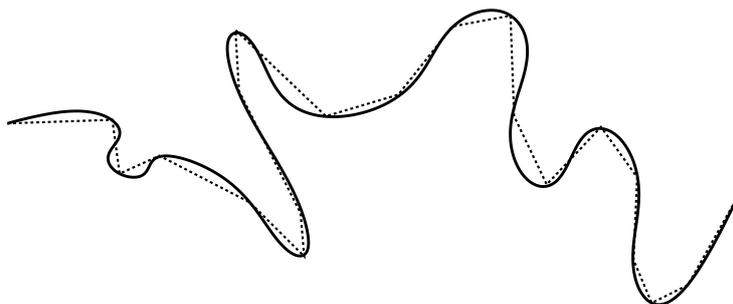
Soient A un arc birégulier de \mathbb{R}^n et P un plan affine de \mathbb{R}^n de direction \vec{P} . Il est évident que si $A \subset P$ alors \vec{P} est le plan osculateur à A en tout point. Réciproquement :

Exercice 3 Montrer qu'un arc birégulier de \mathbb{R}^n ayant même plan osculateur en tout point est contenu dans un plan affine (on pourra utiliser une application linéaire de noyau le plan osculateur).

Exercice 4 Donner une définition de point trirégulier d'un arc géométrique et montrer que cette propriété ne dépend pas du paramétrage.

1.3 Longueur d'arc.

On veut définir maintenant la longueur d'un arc, mais, a priori, on ne sait calculer que la longueur des lignes polygonales. Il est cependant possible d'approcher un arc A par des lignes polygonales comme ceci :



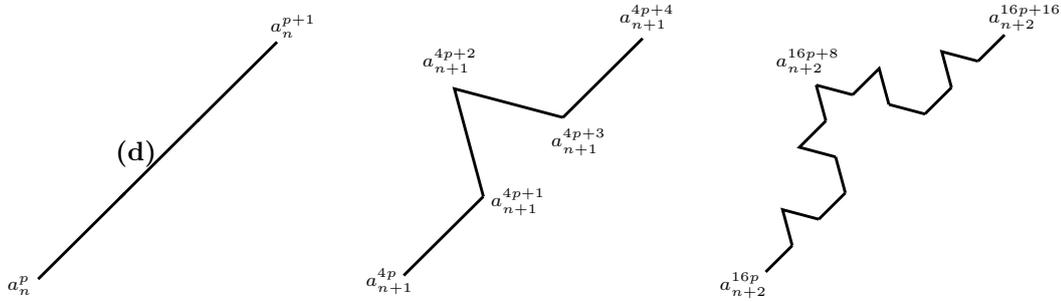
Dans une telle situation, on voit que la longueur de la ligne polygonale est inférieure à celle de A (bien qu'elle ne soit pas encore définie), mais que l'on peut facilement modifier cette ligne de façon à la rapprocher de A . On arrive ainsi à la définition suivante :

Définition 1.3.1 Soient (I, f) un arc paramétré (a priori seulement continu), $[a, b] \subset I$, δ une subdivision de $[a, b]$ (ie la donnée $(a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b)$) et $L_\delta(f([a, b])) = \sum_{i=0}^{l-1} d(f(t_i), f(t_{i+1}))$ (rappelons que d désigne la distance usuelle).

On définit $L(f([a, b]))$, la longueur de $f|_{[a, b]}$ par

$$L(f([a, b])) = \sup_{\delta} L_\delta(f([a, b])).$$

Si ce nombre est fini, on dit que l'arc est rectifiable.

**Remarques :**

- 1) Un changement de paramétrage θ réalise une bijection entre les subdivisions de $[a, b]$ et celle de $\theta([a, b])$. On en déduit que la longueur d'un arc paramétré est invariante par reparamétrage. On peut donc parler de la longueur d'un arc géométrique.
- 2) Si (I, f) un arc paramétré qui n'est pas un segment de droite alors l'inégalité triangulaire prouve que $L(f(I)) > d(f(a), f(b))$. On retrouve le fait que le plus court chemin entre deux points est la ligne droite. Autrement dit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y)$ est le minimum des longueurs des arcs joignant x et y et ce minimum n'est atteint que par la ligne droite.

Contrairement à ce que l'on pourrait imaginer, un arc paramétré *compact* et continu n'est pas forcément rectifiable. La courbe de Koch donne un exemple particulièrement pathologique :

Exemples 1.3.2 La courbe de Koch est obtenue à partir d'un segment de droite, en modifiant récursivement chaque segment de droite de la façon suivante :

- 1) on divise le segment de droite en trois segments de longueurs égales,
- 2) on construit un triangle équilatéral ayant pour base le segment médian de la première étape,
- 3) on supprime le segment de droite qui était la base du triangle de la deuxième étape.

On peut voir cette construction comme suit : cet arc est paramétré par une fonction qui est la limite d'une suite de fonctions affines par morceaux $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. L'image de f_n est une ligne polygonale ayant $4^n + 1$ sommets, notés $a_n^0, \dots, a_n^{4^n+1}$.

Cette suite (f_n) satisfait au critère de Cauchy uniforme et donc qu'elle converge vers une fonction continue f_∞ . Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points $a_n^0, \dots, a_n^{4^n+1}$ sont des points de l'arc paramétré par f_∞ (ils ne bougent plus après leur apparition), on sait que $L(f_\infty([0, 1])) \geq L(f_n([0, 1])) = (4/3)^n$. La courbe de Koch n'est donc pas rectifiable. Mieux ! Si $[a, b] \subset [0, 1]$ et $a \neq b$, on a encore $L(f_\infty([a, b])) = +\infty$.

Ce n'est pas le genre de situation que nous allons rencontrer ; en effet les arcs compacts et lisses (en fait C^1) sont rectifiables. Si on a affaire à un arc différentiable, le calcul différentiel suggère une autre façon d'approcher l'arc $([a, b], f)$ à partir d'une subdivision $(a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b)$: remplacer la restriction de f à $[t_i, t_{i+1}]$ par la fonction affine $t \mapsto f(t_i) + (t - t_i)f'(t_i)$.

Ce nouvel arc n'est plus continu, mais sa comparaison avec l'arc polygonal précédent permet de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 Soient (I, f) un arc paramétré continu et $[a, b] \subset I$ tels que f est de classe C^1 sur $]a, b[$. L'arc $f([a, b])$ est rectifiable si et seulement si l'intégrale (éventuellement) généralisée $\int_a^b \|f'(t)\| dt$ est convergente. On a alors $L(f([a, b])) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$. En particulier, si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $L(f([a, b])) < +\infty$.

Notons ce que ce résultat a de satisfaisant : il affirme que la distance parcourue est obtenue en intégrant la vitesse. Quoi de plus naturel ? Remarquons aussi que la formule de changement de variable nous dit que l'intégrale présente dans l'énoncé ci-dessus est invariante par changement de paramétrage C^1 .

Preuve : Supposons tout d'abord que f est de classe C^1 sur tout $[a, b]$. Le segment $[a, b]$ est

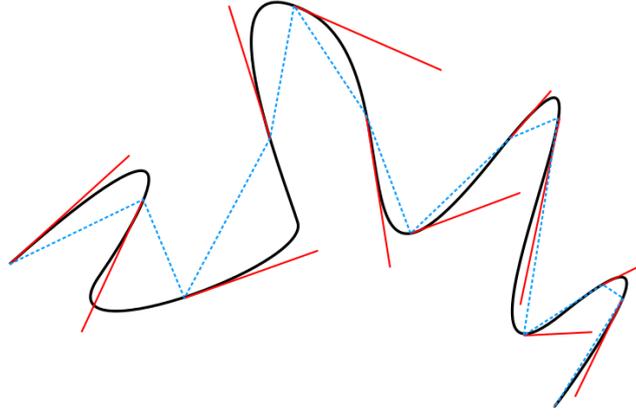


FIGURE 1.2 – Les deux façons d’approcher un arc lisse à partir d’une subdivision

compact et l’application f' est continue donc la restriction de f' à $[a, b]$ est uniformément continue i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (t_1, t_2) \in [a, b], \|t_1 - t_2\| < \eta \Rightarrow \|f'(t_1) - f'(t_2)\| < \varepsilon.$$

En appliquant la formule des accroissements finis à l’application $t \mapsto f(t) - tf'(t)$, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (t_1, t_2) \in [a, b], \|t_1 - t_2\| < \eta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2) - (t_1 - t_2)f'(t_2)\| \leq \varepsilon|t_1 - t_2|. \quad (*)$$

On note Δ l’ensemble des subdivisions $\delta = \{t_i\}$ de $[a, b]$. Si on se donne $\eta > 0$, on note Δ_η l’ensemble des subdivisions de $[a, b]$ telles que pour tout i on a $t_{i+1} - t_i < \eta$. On commence par montrer qu’il revient au même de travailler avec Δ ou Δ_η (et cela quelque soit η). Autrement dit :

Lemme 1.3.4

$$\sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta\} = \sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta_\eta\}.$$

Preuve du lemme 1.3.4 Comme $\Delta_\eta \subset \Delta$, on a $\sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta\} \geq \sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta_\eta\}$. Pour tout $\delta = \{t_0 < \dots < t_l\} \in \Delta$, il est facile de trouver $\delta' = \{t'_0 < \dots < t'_{l'}\} \in \Delta_\eta$ tel que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, l\}$, il existe $j_i \in \{0, 1, \dots, l'\}$ tels que $t_i = t'_{j_i}$ (on rajoute suffisamment de points). L’inégalité triangulaire nous dit que $L_\delta(f([a, b])) \leq L_{\delta'}(f([a, b]))$. Ce qui implique que $\sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta\} \leq \sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta_\eta\}$. Le lemme est montré. \square

Soit $\varepsilon > 0$ et soient $\eta > 0$ donné par (*) et $\delta \in \Delta_\eta$. On commence par écrire

$$\begin{aligned} \left| L_\delta(f([a, b])) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| &\leq \left| L_\delta(f([a, b])) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| \\ &\quad + \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right|. \end{aligned}$$

Comme $\delta \in \Delta_\eta$, par (*) on obtient :

$$\left| L_\delta(f([a, b])) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| \leq \varepsilon(b - a).$$

Par ailleurs, c’est une propriété bien connue de l’intégrale de Riemann qu’il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\delta \in \Delta_{\eta'} \Rightarrow \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en posant $\eta_0 = \min\{\eta, \eta'\}$, on obtient que pour tout $\delta \in \Delta_{\eta_0}$:

$$\left| L_\delta(f([a, b])) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon(1 + (b - a)).$$

Ainsi, en prenant le sup sur les $\delta \in \Delta_{\eta_0}$ (en utilisant 1.3.4) et en faisant tendre ε vers 0, on a finalement :

$$L(f([a, b])) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

On suppose maintenant que f est de classe C^1 seulement sur $]a, b[$ (le cas où f est C^1 sur seulement $]a, b[$ s'en déduit facilement). D'après ce qui précède, pour tout $0 < \varepsilon < b - a$, on sait que $L(f([a + \varepsilon, b])) = \int_{a+\varepsilon}^b \|f'(t)\| dt$. Comme $L(f([a, b])) \geq L(f([a + \varepsilon, b]))$, on a :

$$L(f([a, b])) \geq \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Si $f([a, b])$ est rectifiable, on voit donc que l'intégrale converge. Il ne nous reste plus qu'à montrer que si l'intégrale converge alors l'arc est rectifiable et à déterminer sa longueur.

On suppose donc que $\int_a^b \|f'(t)\| dt < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue en a donc il existe $\eta > 0$ tel que si $|t - a| < \eta$ alors $d(f(t) - f(a)) \leq \varepsilon$. Si $\delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b\} \in \Delta_\eta$ alors

$$\begin{aligned} L_\delta(f([a, b])) &= d(f(a), f(t_1)) + \sum_{i>0} d(f(t_i), f(t_{i+1})) \\ &\leq \varepsilon + L(f[t_1, b]) \\ &\leq \varepsilon + \int_a^b \|f'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant le sup pour les $\delta \in \Delta_\eta$ puis en faisant tendre ε vers 0, on a :

$$L(f([a, b])) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt. \quad \square$$

Exemples 1.3.5 1) On considère la parabole plane paramétrée par $f : t \mapsto (t^2/2, t)$. Calculons $L(f([0, x]))$. D'après le théorème 1.3.3, on a :

$$L(f([0, x])) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt$$

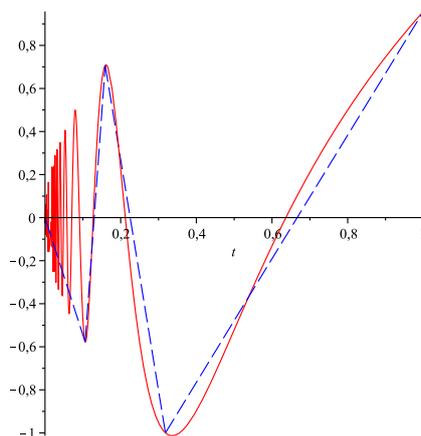
En utilisant le changement de variable $t = \sinh u$ et les égalités $\cosh^2 u = \frac{1 + \cosh(2u)}{2}$ et $\sinh(2 \arg \sinh(x)) = x\sqrt{x^2 + 1}$, on a donc :

$$\begin{aligned} L(f([0, x])) &= \int_0^{\arg \sinh x} \cosh^2 u du = \int_0^{\arg \sinh x} \frac{1 + \cosh(2u)}{2} du \\ &= 1/2 \left[u + \frac{\sinh(2u)}{2} \right]_0^{\arg \sinh x} = \frac{\arg \sinh x}{2} + \frac{\sinh(2 \arg \sinh(x))}{2} \\ &= \frac{\arg \sinh x}{2} + \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2}. \end{aligned}$$

2) Considérons maintenant l'arc paramétré continu (\mathbb{R}, f) , où f est définie pour $t \neq 0$ par $f(t) = (t, \sqrt{\pi} t \cos(1/t))$ et par $f(0) = (0, 0)$ (voir figure 1.3). La fonction f est lisse sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mais seulement continue en 0. On peut appliquer le théorème 1.3.3 et donc

$$L(f([0, 1])) = \int_0^1 \|f'(s)\| ds.$$

Voyons (géométriquement) que cette intégrale généralisée diverge. Par définition, la longueur de cet arc est supérieure à la longueur de la ligne polygonale P_m de sommets les points $f(0)$, $f(\frac{1}{n\pi})$, $n \in \{1, \dots, m\}$ et $f(1)$. En utilisant le théorème de Pythagore, on voit que la longueur de cette ligne polygonale est supérieure à $2 \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}}$. Mais cette série diverge donc cet arc n'est pas non plus rectifiable, bien que $f|_{]0,1]}$ soit de classe C^1 .

FIGURE 1.3 – le graphe de $t \mapsto \sqrt{\pi t} \cos(1/t)$ et la ligne polygonale P_3

Dans la suite, la notion de longueur d'arc va surtout être utilisée pour trouver des paramétrages plus agréables que les autres parmi tous les paramétrages d'un arc régulier A donné.

Définition 1.3.6 On dit que (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc (ou une abscisse curviligne) si pour tout $(t, t_0) \in I^2$, on a $t - t_0 = L(f([t, t_0])) = \int_{t_0}^t \|f'(s)\| ds$.

Il est évident que ceci est équivalent à $\|f'(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$. De même il est clair que si f et g sont deux paramétrages par longueur d'arc de A , alors l'application θ telle que $g = f \circ \theta$ est de la forme $\theta(t) = \pm t + C$.

Proposition 1.3.7 Tout arc géométrique A lisse et régulier admet un paramétrage par longueur d'arc.

Preuve : Soit (I, f) un paramétrage régulier de A et φ la fonction définie par $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$. Comme pour tout $t \in I$, $f'(t) \neq 0$, la fonction φ est lisse et sa dérivée est strictement positive.

Il s'agit donc d'un difféomorphisme lisse de I sur $J = \varphi(I)$. Soit $\theta : J \rightarrow I$ sa fonction réciproque, qui est, elle aussi, lisse. On vérifie que pour tout $s \in J$, $\|(f \circ \theta)'(s)\| = 1$. On a donc bien un paramétrage par longueur d'arc, ce qui termine la preuve.

Remarquons que si (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc d'un arc A alors pour tout $t \in I$, on a $\langle f'(t), f''(t) \rangle = 0$ (car l'application $t \mapsto \|f'(t)\|^2$ est constante). Cette propriété sera souvent utilisée dans la suite.

Exemples 1.3.8 — Le paramétrage par longueur d'arc le plus connu est sans doute celui du cercle unité de \mathbb{R}^2 qui est donné par $s \mapsto (\cos(s), \sin(s))$ (où s est en radians bien-sûr). Ce qui précède donne une explication du fait que les fonctions cosinus et sinus sont lisses : ce sont les composantes d'un paramétrage par longueur d'arc d'un arc lisse.

- Pour paramétrer le cercle de rayon r et de centre 0 , on modifie le paramétrage précédent en $s \mapsto (r \cos(s/r), r \sin(s/r))$. Maintenant, si on se donne un plan P dans \mathbb{R}^n , un point p dans P et $r > 0$, comment trouver le paramétrage du cercle contenu dans P de centre p et de rayon r ?
- Pour obtenir le paramétrage par longueur d'arc de la parabole, il suffirait (!) de trouver la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \frac{\arg \sinh x}{2} + \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}$.

Rappel : On dit qu'une application $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une isométrie si elle préserve la distance, c'est-à-dire si elle vérifie pour tout x et y dans \mathbb{R}^n , $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$.

Les isométries linéaires sont bien connues. Une application linéaire $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une isométrie si et seulement elle préserve le produit scalaire. Autrement dit, si sa matrice dans la base canonique M vérifie ${}^tMM = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n . Une telle matrice est

dite *orthogonale*. L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n forme un groupe noté $O(n)$. Les isométries affines sont obtenues en composant une isométrie linéaire et une translation. On va voir que toutes les isométries de \mathbb{R}^n sont affines.

Proposition 1.3.9 *Une isométrie F de \mathbb{R}^n préserve les longueurs des arcs et envoie droite sur droite.*

Preuve : Soit (I, f) un arc paramétré et $[a, b] \subset I$. On revient à la définition 1.3.1 dont on reprend les notations. Pour toute subdivision δ de $[a, b]$, il est évident que $L_\delta(f([a, b])) = L_\delta(F \circ f([a, b]))$, par conséquent $L(f([a, b])) = L(F \circ f([a, b]))$.

D'après ce qui précède, une isométrie envoie le plus court chemin entre deux points sur le plus court chemin entre les images de ces deux points. Elle envoie donc droite sur droite. \square

Théorème 1.3.10 *Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une isométrie alors F est une application affine dont la partie linéaire appartient au groupe orthogonal.*

Preuve : D'après la proposition 1.3.9, F envoie droite sur droite. De plus le théorème de Pythagore nous dit qu'elle envoie triangle rectangle sur triangle rectangle. Il s'ensuit que F envoie un repère orthonormé (O, e_1, \dots, e_n) sur un repère orthonormé $(F(O), u_1, \dots, u_n)$. Soit G l'isométrie affine envoyant $(F(O), u_1, \dots, u_n)$ sur (O, e_1, \dots, e_n) . L'application $G \circ F$ est une isométrie envoyant (O, e_1, \dots, e_n) sur elle-même. On va montrer que $G \circ F$ est égale à l'identité et donc que F est affine.

D'après ce qui précède, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\text{vect}(e_1, \dots, e_k) = \{e_{k+1}, \dots, e_n\}^\perp$ est préservé par $G \circ F$. On montre par récurrence (finie) que la restriction de $G \circ F$ à $\text{vect}(e_1, \dots, e_k)$ est l'identité pour tout $1 \leq k \leq n$. Il est clair que $F(te_1) = te_1$ pour tout réel t , ce qui initialise la récurrence. Considérons le rang $k+1$ en supposant le résultat vrai au rang k . Considérons alors $x = x_1e_1 + \dots + x_k e_k + x_{k+1}e_{k+1} = y + x_{k+1}e_{k+1}$. La droite passant par y de vecteur directeur e_{k+1} est envoyée par $G \circ F$ sur la droite de $\text{vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ passant par y et perpendiculaire à $\text{vect}(e_1, \dots, e_k)$, c'est-à-dire elle-même. Comme $G \circ F(x)$ est à distance $|x_{k+1}|$ de $G \circ F(y) = y$, on a donc $\|G \circ F(x) - G \circ F(x_{k+1}e_{k+1})\| = \|y \pm x_{k+1}e_{k+1} - x_{k+1}e_{k+1}\| = \|x - x_{k+1}e_{k+1}\| = \|y\|$, d'où $G \circ F(x) = x$. \square

Exercice 5 Montrer qu'une application $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $dF(x) \in O(n)$ est affine (ce qui montre qu'il existe des applications continues de \mathbb{R}^n dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ n'admettant pas de primitive ie qui ne sont la différentielle d'aucune application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n).

1.4 Courbure

1.4.1 Définition

Définition 1.4.1 *Soit A un arc géométrique régulier, (I, f) un paramétrage de A par longueur d'arc et $p = f(t)$ un point de A . La courbure de A en p est le réel positif $K_A(p)$ défini par*

$$K_A(p) = \|f''(t)\|$$

On a vu plus haut que si (J, g) est un autre paramétrage de A obtenu par un changement de paramétrage θ et si $p = f(t) = g(s)$ alors

$$g''(s) = \theta'(s)^2 f''(t) + \theta''(s) f'(t).$$

Rappelons que si (J, g) est lui aussi un paramétrage par longueur d'arc alors $\theta'(s) = \pm 1$ et $\theta''(s) = 0$. On a alors $g''(s) = f''(t)$.

Exemples 1.4.2 L'hélice circulaire H paramétrée par (\mathbb{R}, f) , $f : t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ est à courbure constante. En effet, pour tout t , on a $\|f'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Le paramétrage

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

est donc un paramétrage par longueur d'arc. Dérivons :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \\ g''(t) &= -\frac{a}{a^2+b^2} \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0 \right). \end{aligned}$$

On a donc pour tout $p \in H$, $K_H(p) = \frac{|a|}{a^2+b^2}$, si $a \neq 0$.

La courbure est (relativement) facile à déterminer à partir d'un paramétrage par longueur d'arc. Hélas, il est presque toujours impossible d'obtenir explicitement un tel paramétrage. On voudrait donc calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque. Pour cela il suffit d'exprimer θ' et θ'' en fonction de g' et g'' . D'une part

$$\|g'(s)\| = \|\theta'(s)f'(t)\| = |\theta'(s)|.$$

D'autre part en dérivant $|\theta'(s)|^2 = \langle g'(s), g'(s) \rangle$, on obtient :

$$2\theta'(s)\theta''(s) = 2\langle \theta'(s)f'(t), g''(s) \rangle, \text{ d'où } \theta''(s) = \langle f'(t), g''(s) \rangle.$$

En notant τ le vecteur $f'(t)$ (il est de norme 1 et vérifie $\tau = \pm \frac{g'(s)}{\|g'(s)\|}$) on obtient :

$$\begin{aligned} g''(s) &= \|g'(s)\|^2 f''(t) + \langle g''(s), \tau \rangle \tau, \\ f''(t) &= \frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2} - \left\langle \frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2}, \tau \right\rangle \tau. \end{aligned}$$

Autrement dit, $f''(t)$ est le projeté orthogonal de $\frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2}$ sur τ^\perp . Comme f'' et τ sont perpendiculaires, en développant $\langle g''(s), g''(s) \rangle$ on obtient :

$$K_A(p)^2 = \|f''(t)\|^2 = \left(\frac{\|g''(s)\|}{\|g'(s)\|^2} \right)^2 - \left(\frac{\langle g'(s), g''(s) \rangle}{\|g'(s)\|^3} \right)^2.$$

Application : La courbure de la parabole paramétrée par $f : t \mapsto (t^2/2, t)$ en 0 est 1. En effet $f'(0) = (0, 1)$ et $f''(0) = (1, 0)$.

La courbure est une notion métrique, en tant que telle elle est invariante par isométries, plus précisément :

Proposition 1.4.3 *Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie, A un arc géométrique régulier et p un point de A . La courbure de A au point p est égale à la courbure de $F(A)$ au point $F(p)$.*

1.4.2 cercle osculateur

Définition 1.4.4 *Soient A et B deux arcs géométriques réguliers. On dit que A et B ont un contact d'ordre k en p s'il existe des abscisses curvilignes (I, f) et (J, g) respectivement sur A et B telles que $f(0) = g(0)$ et que $d(f(s), g(s)) = o(s^k)$ au voisinage de 0.*

Remarque 1.4.5 — *Il s'agit d'une relation d'équivalence (l'inégalité triangulaire donne la transitivité).*

- *Deux arcs géométriques réguliers A et B ont un contact d'ordre k en p si et seulement si il existe (I, f) et (J, g) des paramétrages par longueur d'arc de A et B tels que $f(0) = g(0) = p$ et que f et g ont même développement de Taylor à l'ordre k en 0.*

Deux arcs géométriques ont un contact d'ordre 1 en p si et seulement s'ils sont tangents en p c'est-à-dire s'ils ont même tangente en p . Lorsque deux arcs ont un contact d'ordre 2 en p , on dit que les arcs sont *osculateurs*. On cherche un objet qui pourrait jouer le rôle de la tangente pour les contacts d'ordre 2, il nous faut quelque chose de degré (au moins) 2, on pense donc à un cercle.

1. Ainsi $\|g'(s)\|^2 K_A(p)$ est la norme de la partie centripète de l'accélération, la partie de l'accélération qui « fait tourner ».

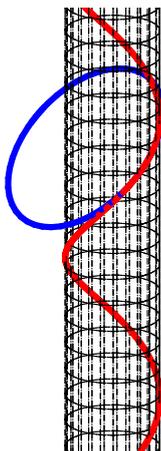


FIGURE 1.4 – Hélice avec un cercle osculateur.

Proposition 1.4.6 Soient p un point d'un arc géométrique régulier A et (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc de A tel que $p = f(0)$.

- Si p est un point d'inflexion alors la tangente en p est osculatrice.
- Si p est birégulier, alors il existe un unique cercle osculateur à A en p . Il s'agit du cercle contenu dans le plan osculateur, de rayon $\frac{1}{K_A(p)}$ et de centre $f(0) + \|K_A(p)\|^{-2} f''(0)$.

Preuve : Supposons que p soit un point d'inflexion, on a alors $f''(0) = 0$. On voit que la tangente en p est osculatrice en la paramétrant par (\mathbb{R}, g) avec $g(t) = f(0) + t f'(0)$. En effet, f et g ont même développement de Taylor à l'ordre 2.

Supposons p birégulier i.e. $f''(0) \neq 0$. D'après la remarque 1.4.5, on cherche les cercles admettant un paramétrage par longueur d'arc (J, h) tel que $h(0) = f(0)$, $h'(0) = f'(0)$ et $h''(0) = f''(0)$.

Soit C le cercle de \mathbb{R}^n de centre a de rayon R contenu dans le plan de direction $\text{Vect}\{u, v\}$. Si $\{u, v\}$ est orthonormée alors C admet pour paramétrage par longueur d'arc

$$h : s \mapsto a + R \cos(s/R)u + R \sin(s/R)v.$$

On voit que la donnée des trois vecteurs $(h(0), h'(0), h''(0))$ détermine a , R , u et v et donc C . En effet, comme $h(0) = a + Ru$, $h'(0) = v$ et $h''(0) = -\frac{1}{R}u$, on a $v = h'(0)$, $u = -\frac{1}{\|h''(0)\|} h''(0)$, $R = \frac{1}{\|h''(0)\|}$ et $a = h(0) + \frac{1}{\|h''(0)\|^2} h''(0)$. On en déduit que le cercle osculateur est le cercle paramétré par :

$$h(t) = f(0) + R^2 f''(0) - R \cos(t/R) R f''(0) + R \sin(t/R) f'(0),$$

où $R = \frac{1}{\|f''(0)\|}$. Il s'agit bien du cercle donné dans l'énoncé. \square

Le cercle osculateur est donc le cercle le plus collé à A en p . Il montre de combien tourne la courbe en ce point. Cela se voit bien sur la figure 1.4.

Exercice 6 Montrer qu'un arc géométrique régulier est une droite si et seulement sa courbure est partout nulle.

Soit (I, f) une abscisse curviligne d'un arc A à courbure constante non nulle. Soit $c(t)$ le centre du cercle osculateur de A au point $f(t)$. Montrer que $c'(t)$ est toujours perpendiculaire au plan osculateur de $f(t)$. Que peut-on dire si on suppose de plus que A est contenu dans un plan ?

1.5 Arcs dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 .

On va avoir besoin dans la suite de considérer des bases orthonormées *directes* de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Rappelons donc qu'une base est dite directe si le déterminant de l'unique endomorphisme qui envoie cette base sur la base canonique est positif.

1.5.1 Arcs de \mathbb{R}^2 .

Dans le plan orienté, il existe une notion de droite et de gauche (ou, si on veut, de tourner dans le sens direct et de tourner dans le sens indirect). Il doit donc être possible, lorsqu'un arc tourne, de dire s'il tourne vers la droite ou vers la gauche. Pour cela il faut bien-sûr faire attention au sens de parcours. En effet, si on se retourne, ce qui était à sa gauche est maintenant à sa droite. Formalisons tout cela.

Soit i la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (dans le sens direct). Elle est caractérisée par $\|x\| = \|i(x)\|$, $\langle x, i(x) \rangle = 0$ et $(x, i(x))$ est une base directe.

Définition 1.5.1 Soit A un arc géométrique orienté de \mathbb{R}^2 et (I, f) une abscisse curviligne de A . Soit $p = f(t)$ un point de A . La courbure algébrique de A en p est définie par

$$k_A(p) := \langle f''(t), i(f'(t)) \rangle.$$

Propriétés élémentaires :

- Clairement $|k_A(p)| = K_A(p)$.
- On peut aussi déterminer le signe de $k_A(p)$ à l'aide d'un paramétrage quelconque (J, g) (avec la bonne orientation). On vérifiera que $\langle f''(t), i(f'(t)) \rangle$ et $\langle (f \circ \theta^{-1})''(\theta(t)), i((f \circ \theta^{-1})'(\theta(t))) \rangle$ sont de même signe, pour tout θ croissant.
- Si on change l'orientation de A , alors $k_A(p)$ change de signe (on s'est retourné).

Si (I, f) est une abscisse curviligne, il existe une fonction lisse λ telle que $f'(t) = (\cos(\lambda(t)), \sin(\lambda(t)))$ (en fait ce n'est pas si évident que ça en a l'air, mais admettons le). On en déduit que $f''(t) = \lambda'(t)(-\sin(\lambda(t)), \cos(\lambda(t)))$. Donc que $\lambda'(t) = k_A(f(t))$. La courbure algébrique est donc la dérivée de (la mesure de) l'angle de la tangente avec l'horizontale, plus précisément de l'angle orienté que forme le vecteur vitesse avec le vecteur $e_1 = (1, 0)$.

Inversement, si on connaît l'expression de k_A en fonction de la longueur d'arc et $\lambda(0)$ on détermine λ en intégrant. Si on connaît de plus $f(0)$, alors f est obtenue en intégrant $(\cos \circ \lambda, \sin \circ \lambda)$. On a donc montré :

Théorème 1.5.2 Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0 et $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse. Soient $(p, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Alors il existe un unique arc géométrique A ayant une abscisse curviligne (I, f) telle que $f(0) = p, f'(0) = v$ et $\forall t \in I, k_A(f(t)) = c(t)$.

Autrement dit, une courbe plane orientée est déterminée, à une isométrie directe près (ce qui correspond à se donner $f(0)$ et $f'(0)$), par sa courbure algébrique.

1.5.2 Arcs de \mathbb{R}^3

On considère maintenant un arc A dans \mathbb{R}^3 . Cela n'a a priori aucun sens de se demander si A tourne vers la gauche ou la droite en un point car, dans l'espace, la gauche et la droite n'ont plus de sens. Nous utilisons bien au quotidien cette notion de gauche et de droite mais nous avons un haut et un bas, ce qui n'est pas le cas, en général, d'un point de \mathbb{R}^3 . On va donc commencer par donner un axe « vertical » à tout point de A , ou plutôt un plan « horizontal » ce qui est la même chose, le seul à notre disposition : le plan osculateur. Ensuite, on va définir ce qu'est être au-dessus de ce plan. Une fois notre arc munit d'un tel dispositif on verra ce qu'on peut dire de plus sur celui-ci. . .

Rappel : Soient x et y deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Le produit vectoriel de x et y , noté $x \wedge y$, est, par définition, l'unique vecteur de \mathbb{R}^3 tel que

$$\forall z \in \mathbb{R}^3, \langle z, x \wedge y \rangle = \det(x, y, z).$$

Ainsi, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 , les coordonnées de $x \wedge y$ dans cette base sont les $\det(x, y, e_i)$.

L'application $(x, y) \mapsto x \wedge y$ est bilinéaire, antisymétrique et ce produit n'est pas associatif. Il vérifie (exercice)

$$\begin{aligned}\langle x, x \wedge y \rangle &= \langle y, x \wedge y \rangle = 0 \\ \|x \wedge y\|^2 + \langle x, y \rangle^2 &= \|x\|^2 \|y\|^2.\end{aligned}$$

Si x et y sont non nuls, on peut définir φ l'angle (forcément non orienté) entre x et y par $\langle x, y \rangle / \|x\| \|y\| = \cos(\varphi)$. L'égalité ci-dessus s'écrit alors $\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| \sin(\varphi)$.

Définition 1.5.3 Soit A un arc birégulier orienté de \mathbb{R}^3 et (I, f) une abscisse curviligne de A et $p = f(t)$ un point de A . On appelle trièdre de Frenet de A en p , le triplet $(\tau(p), \nu(p), \beta(p)) \in (\mathbb{R}^3)^3$ défini par $\tau(p) = f'(t)$, $\nu(p) = \frac{1}{\|f''(t)\|} f''(t)$ et $\beta(p) = \tau(p) \wedge \nu(p)$.

Remarquons tout de suite qu'il s'agit d'une base orthonormée directe. Remarquons aussi que ce trièdre n'est pas défini en un point d'inflexion.

Soit (I, f) une abscisse curviligne, pour alléger les notations, on note $(\tau(t), \nu(t), \beta(t))$ le trièdre de Frenet au point $f(t)$ (au lieu de $(\tau(f(t)), \nu(f(t)), \beta(f(t)))$). Regardons comment varient ces pères. Pour cela dérivons la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

On a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$. Les relations $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ et $\langle \beta(t), \tau(t) \rangle = 0$ donnent par dérivation $\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0$ et $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = -\langle \beta(t), \tau'(t) \rangle$. Or $\tau'(t) = K_A(t) \nu(t)$ donc $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = 0$. Ainsi $\beta'(t)$ est colinéaire à $\nu(t)$. Il existe donc un scalaire noté $T_A(t)$ tel que

$$\beta'(t) = T_A(t) \nu(t).$$

On appelle ce nombre la torsion de A en $f(t)$ (ce qu'on devrait plutôt noter $T_A(f(t))$).

De même, en dérivant $\langle \nu(t), \nu(t) \rangle = 1$, $\langle \nu(t), \tau(t) \rangle = 0$ et $\langle \nu(t), \beta(t) \rangle = 0$, on obtient

$$\nu'(t) = -K_A(t) \tau(t) - T_A(t) \beta(t).$$

Ces formules constituent les *formules de Frenet*. Rappelons qu'elles ne sont valables que pour un paramétrage par longueur d'arc.

Exemples 1.5.4 L'hélice circulaire a pour abscisse curviligne

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \tau(t) = g'(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \nu(t) = g''(t) / \|g''(t)\| = \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right), \\ \beta(t) = \tau(t) \wedge \nu(t) = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{cases}$$

D'où $\beta'(t) = -\frac{b}{a^2 + b^2} \nu(t)$, ainsi la torsion est constante et vaut $-\frac{b}{a^2 + b^2}$.

Il est facile de déterminer le trièdre de Frenet en un point p à partir d'un paramétrage *quelconque* (J, g) (définissant le même arc *orienté*). Pour cela, il suffit de d'appliquer le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt au repère $(g'(s), g''(s), g'(s) \wedge g''(s))$, où s vérifie $g(s) = p$. La flèche $s \mapsto (\tau_A(g(s)), \nu_A(g(s)), \beta_A(g(s)))$ définit bien une application lisse de J dans $(\mathbb{R}^3)^3$. Mais attention, *les composantes de la dérivée de cette application ne satisfont pas aux formules de Frenet!*

Comme pour la courbure, il existe une formule permettant de calculer la torsion à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) :

$$T = -\frac{\det(g', g'', g''')}{\|g' \wedge g''\|^2}$$

Sa preuve est laissée en exercice (on pourra commencer par montrer cette formule pour les abscisses curvilignes et par montrer qu'elle est invariante par changement de paramétrage).

Interprétation géométrique de la torsion :

Un arc *birégulier* A est contenu dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle. On l'a plus ou moins déjà montré. En effet, la torsion mesure la variation du plan osculateur et on a montré à l'exercice 3 que le plan osculateur est constant si et seulement si l'arc est plan. Remontrons le sens le moins évident. On suppose donc A birégulier et à torsion nulle. On se donne un paramétrage par longueur d'arc (I, f) , on a donc, pour tout $t \in I$, $\beta'(t) = 0$. Il existe donc un vecteur v tel que $\beta(t) = v$. On a $\langle v, \tau(t) \rangle = 0$ d'où $\langle v, f(t) \rangle = \text{Cste}$. La courbe est donc contenue dans un niveau d'une forme linéaire c'est-à-dire dans un plan.

On voit donc que la torsion mesure la tendance qu'a l'arc à sortir de son plan osculateur. Cela se voit encore mieux en regardant le développement limité en un point p . En effet, si (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc de A , on a, au voisinage de 0 :

$$f(t) = f(0) + \left(t - \frac{K(0)^2}{6}t^3 + o(t^3)\right) \tau(0) + \left(\frac{K(0)}{2}t^2 + \frac{K'(0)}{6}t^3 + o(t^3)\right) \nu(0) + \left(-\frac{K(0)T(0)}{6}t^3 + o(t^3)\right) \beta(0).$$

On voit bien que si $T_A(0) \neq 0$ alors l'arc traverse strictement son plan osculateur en $f(0)$ (qui est $\text{Vect}(\tau(0), \nu(0))$).

Exercice 7 Dédurre des formules de Frenet la preuve de l'affirmation ci-dessus.

Voyons maintenant ce que l'on peut dire sur le *signe* de la torsion. Si l'arc est parcouru en sens inverse le signe de la torsion est bien-sûr modifié, ce qui limite beaucoup son intérêt. Toutefois, il existe des cas où ce signe est significatif.

On suppose $T(0) \neq 0$. On se place en $f(0)$ dans le repère $(\tau(0), \nu(0), \beta(0))$. On interprète $\tau(0)$ comme le vecteur indiquant la direction « devant », $\nu(0)$ comme celui indiquant la « gauche » et $\beta(0)$ comme celui indiquant le « dessus » (on pensera au triplet pouce, index, majeur de la main droite). Le développement limité ci-dessus nous dit qu'en $f(0)$ on voit toujours la courbe tourner vers la gauche (c.-à-d. que la composante en $\nu(0)$ de $f(t) - f(0)$ est positive) mais qu'on la voit monter si et seulement si la torsion est négative.

Au lieu de se placer dans un repère qui voit tourner la courbe toujours vers la gauche, on aurait pu se placer dans un repère qui voit toujours la courbe monter (c.-à-d. le repère $(\tau(0), -\frac{T(0)}{|T(0)|}\nu(0), -\frac{T(0)}{|T(0)|}\beta(0))$). Cette fois l'arc est à torsion positive s'il spirale vers la droite et à torsion négative s'il spirale vers la gauche.

On voit donc que le signe de la torsion est ce qui différencie les coquilles dextres, des coquilles senestres ou un pas de vis de son image dans un miroir (après s'être mis d'accord sur un sens de parcours, par exemple de la pointe vers la base).

C'est ce que montre notamment la proposition suivante.

Proposition 1.5.5 Soient $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une isométrie de partie linéaire dF , A un arc géométrique birégulier et p un point de A . On a alors $K_A(p) = K_{F(A)}(F(p))$ et $T_A(p) = \epsilon T_{F(A)}(F(p))$, où désigne par ϵ le signe du déterminant de dF

Preuve : Soit (I, f) un paramétrage par longueur d'arc de A . Le paramétrage $(I, F \circ f)$ est un paramétrage par longueur d'arc de $F(A)$. Comme F est une isométrie, on a :

$$(dF(\tau_A(t)), dF(\nu_A(t)), dF(\beta_A(t))) = (\tau_{F(A)}(t), \nu_{F(A)}(t), \epsilon \beta_{F(A)}(t)),$$



FIGURE 1.5 – coquille senestre et coquille dextre

On en déduit que $K_A(t) = K_{F(A)}(t)$ et que $T_A(t) = \epsilon T_{F(A)}(t)$. \square

Attention, la torsion n'est définie qu'en les points biréguliers. L'arc paramétré (\mathbb{R}, f) où f est définie par

$$f(t) = \begin{cases} (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0) & \text{si } t > 0 \\ (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}) & \text{si } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est lisse, régulier, birégulier sauf en $t = 0$. Sa torsion est nulle partout où elle est définie mais la courbe n'est pas plane!

Pour finir donnons un analogue du théorème 1.5.2. Commençons par une version plus faible, affirmant que *deux arcs biréguliers ayant mêmes courbures et torsions sont en fait image l'un de l'autre par une isométrie* (en particulier les seuls arcs biréguliers de \mathbb{R}^3 ayant une courbure et une torsion constantes sont les hélices circulaires). La preuve de ce résultat découle de la proposition 1.5.5 ci-dessus et de l'exercice 8 (qui est de nature plutôt géométrique).

Exercice 8 (DS 2011)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant 0, (I, f_1) et (I, f_2) deux arcs paramétrés par longueur d'arc et biréguliers de \mathbb{R}^3 . Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on désigne par $(\tau_i(t), \nu_i(t), \beta_i(t))$, $K_i(t)$ et $T_i(t)$ le repère de Frenet, la courbure et la torsion de (I, f_i) au point $f_i(t)$.

On suppose que pour tout $t \in I$, on a $K_1(t) = K_2(t)$ et $T_1(t) = T_2(t)$, que de plus $f_1(0) = f_2(0)$ et $(\tau_1(0), \nu_1(0), \beta_1(0)) = (\tau_2(0), \nu_2(0), \beta_2(0))$.

1) Montrer que

$$A(t) = \langle \tau_1(t), \tau_2(t) \rangle + \langle \nu_1(t), \nu_2(t) \rangle + \langle \beta_1(t), \beta_2(t) \rangle$$

est constant. Déterminer cette valeur.

2) Montrer que s'il existe $t \in I$ tel que $\tau_1(t) \neq \tau_2(t)$ alors $A(t) < 3$.

3) En déduire que pour tout $t \in I$, $\tau_1(t) = \tau_2(t)$ puis que $f_1 = f_2$.

4) On ne suppose plus que $f_1(0) = f_2(0)$ et $(\tau_1(0), \nu_1(0), \beta_1(0)) = (\tau_2(0), \nu_2(0), \beta_2(0))$. Montrer qu'il existe une isométrie affine F telle que $F \circ f_1 = f_2$.

Donnons maintenant le véritable analogue du théorème 1.5.2 dont la preuve est de nature plus analytique.

Théorème 1.5.6 Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0, $c : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $d : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications lisses. Soient $(p, v, w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Alors il existe un unique arc géométrique A de \mathbb{R}^3 ayant une abscisse curviligne (I, f) telle que

$$f(0) = p, f'(0) = v, \frac{f''(0)}{\|f''(0)\|} = w \text{ et } \forall t \in I, \begin{cases} K_A(f(t)) = c(t) \\ T_A(f(t)) = d(t) \end{cases}.$$

Preuve du théorème 1.5.6 : Le problème de Cauchy (linéaire)

$$\begin{cases} (X', Y', Z') = (cY, -cX - dY, dY), \\ (X(0), Y(0), Z(0)) = (v, w, v \wedge w) \end{cases}$$

a une unique solution sur I que l'on note (X, Y, Z) .

Soit $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}^6$, définie par

$$\Psi(t) = (\|X\|^2, \|Y\|^2, \|Z\|^2, \langle X, Y \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle Y, Z \rangle).$$

Cette fonction est solution d'une équation différentielle linéaire. En effet, elle vérifie

$$\Psi'_1 = 2c\Psi_4, \quad \Psi'_2 = -2c\Psi_4 - 2d\Psi_6, \quad \Psi'_3 = 2d\Psi_6,$$

$$\Psi'_4 = c\Psi_2 - c\Psi_1 - d\Psi_5, \quad \Psi'_5 = c\Psi_5 + d\Psi_4, \quad \Psi'_6 = -c\Psi_5 - d\Psi_3 + d\Psi_2.$$

Par conséquent $\Psi(t) \equiv (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ (on a deux solutions d'un même problème de Cauchy) et donc (X, Y, Z) est une base orthonormée directe.

Soit A l'arc paramétré par $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $f(t) = u + \int_0^t X(s)ds$. Il s'agit d'un paramétrage l.a. car $\|f'(t)\| = \|X(t)\| = 1$.

De plus $\tau'(t) = X'(t) = cY(t)$, donc $K_A(f(t)) = c(t)$ et $\nu(t) = Y(t)$.

D'où $\beta(t) = Z(t)$ et $T_A(f(t)) = d(t)$. \square