Contour apparent

(1) L'application Q est une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ ainsi la fibre $E = Q^{-1}(\{1\})$ est une quadrique. Comme Q est définie positive, il vient que E est un ellipsoïde.

(2) L'application Q établit une submersion sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ car son gradient

$$\nabla Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix}$$

ne s'annule pas sur cet ouvert. En tant que fibre d'une submersion $E = Q^{-1}(\{1\})$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

(3) On peut montrer de façon pédestre que E est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^3$; fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue, bornée car si $(x,y,z) \in E$ alors $x \leq a$, $y \leq b$ et $z \leq c$.

On peut aussi dire que l'application $\sqrt{Q}$ est une norme associée à un produit scalaire, ainsi E correspond à la sphère unité d'une certaine norme sur $\mathbb{R}^3$ et par conséquent est compacte.

(4) L'application $(x,y,z) \mapsto (ax, by, cz)$ est un isomorphisme linéaire (en particulier un homéomorphisme) de $\mathbb{R}^3$ envoyant E sur la sphère unité. En dimension finie, la sphère unité d'un espace vectoriel normé est compacte, E étant homéomorphe à un compact est elle-même compacte.

La connexité par arcs est une propriété topologique, comme E est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, montrer que E est connexe par arcs équivaut à montrer que la sphère de dimension 2 est connexe par arcs.

Prenons deux points de $\mathbb{S}^2$, il existe au moins un plan vectoriel contenant ces deux points (ce plan est d'ailleurs unique lorsque ces points ne sont pas alignés avec l'origine), l'intersection du plan avec la sphère est un cercle (c'est l'ensemble des vecteurs à distance 1 de l'origine dans le plan vectoriel), ce cercle forme un chemin continu (on peut le paramétrer par cos et sin) joignant les deux points considérés.

On aurait pu exhiber le chemin suivant (qui en fait est le même) : $t \in [0,1]$

$$t \mapsto \frac{tx + (1-t)y}{||tx + (1-t)y||}$$

où x et y sont deux points de la sphère non alignés avec l'origine, dans le cas où les points sont alignés on relie chacun de ces points à un troisième.

(5) Il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ envoyant E sur la sphère euclidienne unité, or il est clair que le complémentaire de sphère euclidienne dans $\mathbb{R}^3$ a deux composantes connexes, l'une correspondant à la boule unité ouverte qui est clairement connexe car convexe, et l'autre correspondant aux vecteurs de norme strictement plus grande que 1, cet ensemble est lui aussi connexe car on peut relier de façon continue (par un segment) tout point de cet ensemble à un point de la boule euclidienne de rayon 2 centrée en 0 qui est elle aussi connexe.

(6) L'hyperplan vectoriel tangent à E en (x,y,z) est le noyau de la différentielle de Q en ce point :

$$T_{(x,y,z)}E = \mathrm{Ker}(\mathrm{D}Q(x,y,z)) = \left\{ (u,v,w) \ ; \ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x/a^2 \\ y/b^2 \\ z/c^2 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

L'équation de plan tangent vectoriel à E en (x,y,z) est donc :

$$u\frac{x}{a^2} + v\frac{y}{a^2} + u\frac{z}{c^2} = 0,$$

et celle du plan tangent affine :

$$(u-x)\frac{x}{a^2} + (v-y)\frac{y}{a^2} + (u-z)\frac{z}{c^2} = 0.$$

(6)-a

(6)-b Montrons que $\mathcal{C}(A)$ est non vide. Travaillons dans un plan vectoriel $\mathcal{P}$ contenant A. L'intersection $\mathcal{P} \cap E$ est une ellipse : Q étant définie positive, sa restriction à $\mathcal{P}$ est encore une forme quadratique définie positive, ainsi $\mathcal{P} \cap E$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ vérifiant $Q_{|\mathcal{P}}(M) = 1$ où $Q_{|\mathcal{P}}$ est définie positive, c'est donc une ellipse. Fixons nous une droite Δ passant par A et n'intersectant pas E, l'application $g : (\mathcal{P} \cap E) \setminus \{M_1, M_2\} \to \Delta$ qui à un point M associe le point d'intersection de Δ avec la tangente à $\mathcal{P} \cap E$ en M est une application continue, définie sur tout $\mathcal{P} \cap E$ moins deux points M_1 et M_2, en lesquels la tangente est parallèle à Δ. Lorsque M parcourt un des deux arcs joignant M_1 à M_2 le point $g(M)$ parcourt la droite Δ tout entière. Par le théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire par connexité, il existe un M_0 tel que $g(M_0) = A$. A appartient à la tangente à $\mathcal{P} \cap E$ en M_0, a fortiori au plan tangent à E en M_0, soit $M_0 \in \mathcal{C}(A)$.

(6)-c *Première solution.* Considérons d'abord le cas de la sphère. Par isotropie (*i.e.* indépendance vis à vis de la direction) nous pouvons supposer que le point A a pour coordonnées $(0, 0, z_0)$. Soit M un point de $\mathcal{C}(A)$, travaillons dans le plan vectoriel $\mathcal{P}$ contenant A et M (ces points ne sont pas alignés avec l'origine). L'intersection de la sphère avec $\mathcal{P}$ est un cercle, et la droite (AM) est tangente à ce cercle par définition de $\mathcal{C}(A)$. Cette construction étant valable pour tous les points $M \in \mathcal{C}(A)$, il est clair que la coordonnée en z est identique pour tous. En se plaçant dans le triangle rectangle (AMO) on trouve $AM = \sqrt{z_0^2 - 1}$ et $\cos\theta = \frac{\sqrt{z_0^2-1}}{z_0}$ où θ est l'angle (MAO), en se plaçant ensuite dans le triangle (AHM) où H est la projection de M sur l'axe (Oz) on trouve $AH = \cos(\theta)AM = \frac{z_0^2-1}{z_0}$ et $OH = 1/z_0$. La coordonnée en z est donc la même pour tous les points de $\mathcal{C}(A)$ et vaut $1/z_0$. Réciproquement les points de la sphère de coordonnée $z = z_0$ appartiennent tous à $\mathcal{C}(A)$ vue notre construction, donc $\mathcal{C}(A) = \mathbb{S}^2(0, 1) \cap \{z = z_0\}$. Il est clair que $\mathcal{C}(A)$ est un cercle.

Nous nous ramenons au cas général par l'application linéaire $f : (x, y, z) \mapsto (ax, by, cz)$. Je dis que M appartient au contour apparent de E en A si et seulement si $f(M)$ appartient au contour apparent de $\mathbb{S}^2(0, 1)$ en $f(A)$; en effet comme $f = \mathrm{D}f(M)$, f envoie le plan tangent affine à E en M sur plan tangent affine à $\mathbb{S}^2(0, 1)$ en $f(M)$. Donc les contours apparents de E en A et $\mathbb{S}^2(0, 1)$ en $f(A)$ sont échangés par f.

Comme f et f^{-1} sont linéaires il est clair que le contour apparent à E en A est l'intersection de E avec un plan affine, et que c'est une ellipse.

Deuxième solution Une autre solution consiste à suivre l'énoncé. Commençons par montrer

$$\mathcal{C}(A) = \{(x, y, z) \; ; \; Q(x, y, z) = 1 \text{ et } B(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = 1\}.$$

Un point M appartient à $\mathcal{C}(A)$ *ssi* $M \in E$ et A appartient au plan affine tangent à E en M. $M \in E$ équivaut à $Q(M) = 1$, et A appartient au plan affine tangent équivaut à $A = M + u$ avec u un vecteur du plan vectoriel tangent. Il est facile de voir que u appartient au plan tangent vectoriel *ssi* $\mathrm{D}Q(M)(u) = B(M, u) = 0$. On en déduit que $A = M + u$ (avec $M \in E$) appartient au plan affine tangent à E en M *ssi*

$$B(M, A) = B(M, M + u) = Q(M, M) + B(M, u) = 1 + B(M, u) = 1.$$

On a donc

$$\mathcal{C}(A) = \{(x, y, z) \; ; \; Q(x, y, z) = 1\} \cap \{(x, y, z) \; ; \; B(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = 1\} = E \cap \mathcal{H}$$

où $\mathcal{H}$ est l'hyperplan affine d'équation $B(\cdot, A) = 1$. L'intersection d'un ellipsoïde avec un hyperplan affine est ou bien vide, ou bien un point, ou bien une ellipse ; comme dans le cas présent elle est non vide et non réduite à un point (voir question précédente) c'est une ellipse et on a bien une sous-variété de dimension 1.

(6)-d Cette question est un peu redondante, néanmoins nous avons vu que $\mathcal{C}(A)$ est l'intersection d'un plan affine avec l'ellipsoïde, à un isomorphisme affine près c'est l'intersection d'un plan affine avec une sphère, donc un cercle. L'image d'un cercle par un isomorphisme affine est une ellipse d'où $\mathcal{C}(A)$ est une ellipse.

(6)-d La définition de $\mathcal{C}(A)$ ne varie pas, le contour apparent d'une quadrique compacte non dégénérée de dimension n est une quadrique compacte non dégénérée de dimension $n - 1$.