Exercice 1 *Application de Gauss*
On notera (x, y) les coordonnées dans l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

1. (a) Soit $M \in S \cap V$ et $(x, y) \in U$ tel que $f(x, y) = M$, on a

$$T_M S = \mathrm{Im}(Df(x,y)) = \mathrm{Vect}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\}.$$

L'application φ définie par

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & S \cap V & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & M & \longmapsto & \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{||\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)||} \quad \text{avec } (x,y) \in U \text{ tel que} f(x,y) = M \end{array}$$

est une application C^∞ sur $S \cap V$ car elle est lisse en (x, y) qui forme un système de coordonnées locales de S, de plus à tout point M de $S \cap V$ elle associe un vecteur unitaire orthogonal au plan tangent $T_M S$.

1. (b) L'application φ définie précédemment est donnée au signe près par

$$\varphi(M) = \frac{\mathrm{grad}(g)\ (M)}{||\mathrm{grad}(g)\ (M)||}$$

car $T_M S = \mathrm{Ker}(Dg(M)) = \langle \mathrm{grad}(g)\ (M)\rangle^\perp$.

2. (a) N est obtenue à partir de φ en restreignant l'espace d'arrivée à $\mathbb{S}^2$ au lieu de $\mathbb{R}^3$ tout entier. Comme φ est C^∞ et $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, l'application N est elle aussi C^∞.

2. (b) Soit $M \in S \cap V$, on a $DN_M : T_M S \to T_{N(M)}\mathbb{S}^2$, or on a déjà vu en exercice que $T_{N(M)}\mathbb{S}^2$ est le plan orthogonal à $N(M)$, autrement dit $T_M S$. Ainsi DN_M est un endomorphisme de $T_M S$.

3. (a) Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est un vecteur du plan tangent à S en $f(x, y)$ et $N(f(x, y))$ est un vecteur normal à ce plan, il est clair que leur produit scalaire est identiquement nul.

3. (b) En dérivant $\langle N \circ f, \frac{\partial f}{\partial x}\rangle$ par rapport à y on obtient l'identité voulue. Le calcul s'effectue en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.

3. (c) Même chose mais en dérivant par rapport à x.

3. (d) La famille $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right\}$ forme une base de $T_M S$. On a par le (b)

$$\langle DN_M(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\rangle = -\langle N(f(0,0)), \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0,0)\rangle$$

puis par le (c)

$$\langle DN_M(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\rangle = -\langle N(f(0,0)), \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0,0)\rangle$$

d'où

$$\langle DN_M(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\rangle = \langle\frac{\partial f}{\partial y}(0,0), DN_M(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0))\rangle.$$

De plus il vient trivialement

$$\langle DN_M(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\rangle = \langle\frac{\partial f}{\partial y}(0,0), DN_M(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\rangle$$

et

$$\langle DN_M(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\rangle = \langle\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), DN_M(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0))\rangle.$$

L'endomorphisme est "auto-adjoint sur une base", par linéarité il l'est sur tout l'espace $T_M S$.

4. (a) Si S est un plan vectoriel d'équation $ax + by + cz = 0$ alors on a

$$N \equiv \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

et sa différentielle est nulle.

4. (b) Si $S = \mathbb{S}^2$ alors N est l'identité et sa différentielle aussi.

4. (c) Si S est le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$, alors

$$N(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2
On désigne par $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$, que l'on identifiera à $\mathbb{R}^{n^2}$ et par $Sym(n)$ celui des matrices symétriques (de dimension $n(n+1)/2$).
Soit $SO(n) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, {}^tMM = Id \text{ et } \det M = 1\}$ le groupe spécial orthogonal.

(1) Montrer que $GL^+ = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \det M > 0\}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
Soit $f : GL^+ \to Sym(n)$ telle que $f(M) = {}^tMM - Id$. Montrer que $SO(n) = f^{-1}(0)$.
En déduire que $SO(n)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$.

GL^+ est un ouvert car det est une application continue. L'application f est lisse car on peut l'écrire comme la composée d'une application linéaire, d'une application biléaire et d'une translation ($M \mapsto ({}^tM, M) \mapsto {}^tMM \mapsto {}^tMM - I_n$). On déduit de cette décomposition que $Df(M).H = {}^tMH + {}^tHM$. Pour voir que $Df(M)$ est surjective on remarque que si S est symétrique $Df(M).({}^tM^{-1}S) = 2S$. On voit par ailleurs que $f^{-1}(0) = O(n) \cap GL_+ = SO(n)$. $SO(n)$ est la fibre d'une submersion lisse définie sur un ouvert d'un espace vectoriel, c'est donc une sous-variété. Sa codimension est donnée par la dimension de l'espace d'arrivée :$n(n+1)/2$; on en déduit la dimension de $SO(n)$.

(2) Soit $A \in SO(n)$. Monter que les applications $M \mapsto M^{-1}$, $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ sont des difféomorphismes lisses de $SO(n)$. (cette question ne nécessite pas de calculs).

L'application $M \mapsto {}^tM$ est une application linéaire donc lisse de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Sa restriction à $SO(n)$ est l'application inverse qui est donc lisse sur $SO(n)$. Étant égale à son inverse on a donc un difémorphisme. Les applications $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ sont linéaires (sur $M_n(\mathbb{R})$) donc lisses et leurs inverses sont les applications $M \mapsto A^{-1}M$ et $M \mapsto MA^{-1}$.

(3) On définit l'application

$$\begin{array}{rcl} P : SO(3) & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ A & \mapsto & A.\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{array}.$$

Montrer que P arrive bien dans $\mathbb{S}^2$, que P est lisse, surjective et que P est une submersion.

P est lisse car c'est la restriction d'une application linéaire.
Sa différentielle en A va du tangent en A à $SO(3)$ cad $\{H \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, {}^tAH + {}^tHA = 0\} = \{AK \,|\, {}^tK + K = 0\}$ dans le tangent à $\mathbb{S}^2$ en $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et est définie par $DP(A).H = H.\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (les sceptiques vérifieront que $\langle DP(A).H, P(A)\rangle = 0$). Le noyau de $DP(I_3)$ est constitué des matrices antisymétriques ayant $(1, 0, 0)$ dans leur noyau, le noyau de $DP(A)$ est obtenu en multipliant à gauche par A le noyau de $DP(I_3)$ (vérifier). On a donc toujours $\dim(\ker(DP(A))) = 1$ et donc $\mathrm{rang}(DP(A)) = 2$ et donc P est une submersion.
P est une submersion donc P est ouverte et donc $P(SO(3))$ est un ouvert. $SO(3)$ est compact donc $P(SO(3))$ est compacte donc fermée. S^2 étant connexe on en déduit que $P(SO(3)) = \mathbb{S}^2$ et que P est surjective.(on peut aussi le montrer à la main)

(4) On désigne par R_θ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Montrer que $P(A) = P(B)$ si et seulement si il existe θ tel que $A^{-1}B = R_\theta$. En déduire que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{S}^2,\ P^{-1}(x,y,z)$ est difféomorphe à $SO(2)$, c'est-à-dire à $\mathbb{S}^1$ (on pourra utiliser l'une des applications de la question 2).

Si $P(A) = P(B)$ alors $A^{-1}B.\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = A^{-1}.A.\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$. On voit alors que $A^{-1}B$ est de la forme voulue.
On remarque que $P^{-1}(1,0,0) = \{R_\theta\}$ est trivialement difféomorphe à $SO(2)$. Si $A \in P^{-1}(x,y,z)$ alors d'après ce qui précède $P^{-1}(x,y,z) = A.(P^{-1}(1,0,0))$. L'application $M \mapsto AM$ est un difféomorphisme de $SO(3)$ et donc $P^{-1}(x,y,z)$ est difféomorphe à $P^{-1}(1,0,0)$ et donc à $SO(2)$.

(5) Soit $U = \mathbb{S}^2 \backslash \{(\pm 1, 0, 0)\}$. Soit $S : U \to SO(3)$ définie par $S(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & 0 & -\sqrt{y^2+z^2} \\ y & \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} & \frac{xy}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ z & \frac{-y}{\sqrt{y^2+z^2}} & \frac{xz}{\sqrt{y^2+z^2}} \end{pmatrix}$.

Montrer que S est bien à valeur dans $SO(3)$ qu'elle est lisse et que $P \circ S = Id_U$. En déduire sans calculs que S est une immersion injective.

Il suffit de vérifier et en différentiant $P \circ S = Id_U$ on voit que S est une immersion.

(6) En déduire que $P^{-1}(U)$ est difféomorphe à $U \times \mathbb{S}^1$ (on considèrera l'application $((x,y,z),\theta) \mapsto S(x,y,z).R_\theta$).

On a une application lisse ϕ de $U \times \mathbb{S}^1$ dans $P^{-1}(U)$ définie par $\phi((x,y,z),\theta) = S(x,y,z).R_\theta$. Son inverse est donné par $\phi^{-1}(M) = (P(M), S(P(M))^{-1}M)$ (on arrive dans $U \times P^{-1}(1,0,0)$ qui est difféomorphe à $U \times S^1$). Il est clairement lisse donc on a bien un difféomorphisme.

(7) On pourrait faire de même pour $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, \pm 1, 0)\}$ et montrer que $P^{-1}(V)$ est difféomorphe à $V \times \mathbb{S}^1$. On remarquera que cela *n'implique pas* que $SO(3)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (ce qui est de toute façon faux.)
Par contre, la sphere $\mathbb{S}^3$ est plus conciliante. On définit $P : SO(4) \to \mathbb{S}^3$ de la même façon.
Montrer qu'il existe $S : \mathbb{S}^3 \to SO(4)$ telle que $P \circ S = Id$ (l'application S est beaucoup plus simple que la précédente). En déduire que $SO(4)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3 \times SO(3)$.
(En fait $SO(n+1)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^n \times SO(n)$ si et seulement si $n = 1, 3$ ou 7.).

On pose $S(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & -y & z & -t \\ y & x & -t & -z \\ z & -t & -x & y \\ t & z & y & x \end{pmatrix}$ (il faut éventuellement permuter 2 colonnes pour avoir un determinant égal à 1) et le reste suit à l'identique.