MHT 513 2007-2008 Devoir1

A remettre dans la semaine 40

Exercice 1.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ l' espace des matrices carrées réelles d'ordre n. On note $det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant du n-uplet de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Soit f l' application de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ dans $(\mathbb{R}^n)^n$ définie par $f(M) = (M.e_1, \ldots, M.e_n)$ et g l' application de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x_1, \ldots, x_n) = det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$.

Déterminer l'application $g \circ f$. Démontrer que l' application déterminant de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable en tout point et que $Ddet(X).H = Tr(\widetilde{X}^t H)$ où $\widetilde{X}$ désigne la matrice des cofacteurs de X et $\widetilde{X}^t$sa transposée.

Exercice 2.

a) Soit E un espace normé et f une application définie sur un ouvert de E à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable en tout point. Démontrer que si f admet un extremum local en un point, sa différentielle y est nulle.

b) E est un espace normé, U est un ouvert de E tel que $\overline{U}$ soit compact, et $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ une application continue, nulle sur la frontière de U et différentiable dans U. Démontrer qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $Df(x_0) = 0$.

Exercice 3.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

i) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $g(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$. Montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle.

ii) Démontrer la formule :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\int_0^1 (f'(a+th) - f'(a))dt, \ a, h \in \mathbb{R}.$$

iii) On désigne dans la suite par c_0 l'espace des suites réelles tendant vers 0 et pour $x = (x_n)_n$ élément de c_0, on pose $\|x\| = \sup\{|x_n|, \ n \in \mathbb{N}\}$. Démontrer que l'application $\|.\|$ est une norme sur c_0.

iv) On munit c_0 de la norme définie dans iii) et on suppose ici que $f(0) = 0$. Comme dans i) on définit l'application Φ de c_0 dans lui-même par

$$\Phi(x) = \Phi((x_n)_n) = (f(x_n))_n, \ x = (x_n)_n \in c_0$$

Démontrer que Φ est différentiable.