Université Bordeaux 1 Année 2007-2008
Master 1 de mathématiques

1er Devoir Maison
Géométrie differentielle.

Exercice 1 1. Soient $r \in \mathbb{R}$ et F_r l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on note $[x,y]$ son image dans $P^1_{\mathbb{R}}$. Montrer que les applications $f_r : P^1_{\mathbb{R}} \to P^1_{\mathbb{R}}$ définies par $f_r([x,y]) = [f_r(x,y)]$ sont des difféomorphismes lisses (i.e. de classe C^∞).
Dorénavant on notera simplement f l'application f_1. Soit $\{(U_0,\phi_0);(U_1,\phi_1)\}$ l'atlas usuel de $P^1_{\mathbb{R}}$. Déterminer $f(U_0)$, $f(U_1)$. Pour tout $[x,y] \in P^1_{\mathbb{R}}$, étudier les suites $\big(f^n([x,y])\big)_n$ et $\big(f^{-n}([x,y])\big)_n$.

2. Montrer que l'on définit une action du groupe $\mathbb{Z}$ sur $P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ en posant $n.([x,y],t) = (f^n([x,y]), t+n)$. On note X l'ensemble quotient de $P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$, autrement dit l'ensemble obtenu en quotientant par la relation d'équivalence $([x,y],t) \simeq ([x',y'],t') \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, ([x',y'],t') = n.([x,y],t)$. On note p la projection de $P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ dans X.
Pour tout $(i,j) \in \{0,1\}^2$, on pose $V_{i,j} = p\big(U_i \times]0 + (\frac{1}{2})^j, 1 + (\frac{1}{2})^j[\big)$. En utilisant p, les quatre $V_{i,j}$ et l'atlas usuel de $P^1_{\mathbb{R}}$, construire un atlas de X (on pourra n'expliciter que les trois changements de cartes concernant $V_{0,0}$).
Montrer que X est compacte.
3. Montrer que la projection $\pi : P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit une submersion $\overline{\pi}$ de X dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$. Montrer que pour tout $\theta \in S^1$ l'ensemble $\overline{\pi}^{-1}(\theta)$ est une sous-variété compacte de dimension 1 difféomorphe à $P^1_{\mathbb{R}}$ (et donc à S^1). En déduire l'existence d'une partition de X en cercle.
4. Montrer que l'application $i_{[x,y]} : \mathbb{R} \to X$ définie par $i_{[x,y]}(t) = p([x,y],t)$ est une immersion.
   (a) Montrer que si $[x,y] = [1,0]$, alors $i_{[x,y]}(\mathbb{R})$ est une sous-variété difféomorphe à S^1.
   (b) Montrer que si $[x,y] \neq [1,0]$, alors $i_{[x,y]}$ est injective. Soit $(t_n)_n$ une suite tendant vers $\pm\infty$. Prouver que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\big(i_{[x,y]}(t_n)\big)_n$ est contenu dans $i_{[1,0]}(\mathbb{R})$. Montrer que $i_{[x,y]}$ est un plongement.
   (c) Montrer que pour tout $([x,y],[x',y'])$ on a soit $i_{[x,y]}(\mathbb{R}) = i_{[x',y']}(\mathbb{R})$ ou $i_{[x,y]}(\mathbb{R}) \cap i_{[x',y']}(\mathbb{R}) = \emptyset$. En déduire l'existence d'une nouvelle partition de X en sous-variétés de dimension 1.
5. Qu'est ce qui laissait prévoir l'existence de ces deux partitions dans l'atlas de X ?
6. Soit $\Psi : P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ définie par $f([x,y],t) = (f_t([x,y]),t)$ permet de définir un difféomorphisme de $P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire du tore) sur X. Quel est l'intérêt d'une telle présentation (celle donnant X) du tore ?

Exercice 2 Soit X une variété et Y une sous variété de X. On rappelle que Y est alors munie d'une structure de variété.
1. Montrer que si Z est une sous-variété de Y alors Z est une sous-variété de X.
2. Montrer que si Z est une sous-variété de X contenue dans Y alors Z est une sous-variété de Y.
3. L'intersection de deux sous-variétés est-elle une sous-variété ? Donner un contre-exemple ou une preuve.

Exercice 3 Soit Γ le sous-groupe (non abélien) du groupe des transformations affines du plan engendré par $\alpha : (x,y) \mapsto (x,y+1)$ et $\beta : (x,y) \mapsto ((x+1,-y+1)$. On note K l'espace quotient $\mathbb{R}^2/\Gamma$ et p la projection de $\mathbb{R}^2$ dans K. K est appelé la bouteille de Klein.
1. En s'inspirant du tore, montrer que K est naturellement muni d'une structure de variété, donner un atlas.
2. Montrer que Γ_0 le sous-groupe de Γ engendré par α et $\beta^2 = \beta \circ \beta$ est un sous-groupe d'indice 2 (on pourra utiliser $\alpha^{-1} \circ \beta = \beta \circ \alpha$) isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. On note p_0 la projection de $\mathbb{R}^2$ dans le tore $\mathbb{R}^2/\Gamma_0$. Montrer que l'application $\overline{p}$ du tore dans la bouteille de Klein qui à $p_0(x,y)$ associe $p(x,y)$ est bien définie et que $\overline{p}$ est un difféomorphisme local. Que vaut $\mathrm{card}(\overline{p}^{-1}(p(x,y)))$?
3. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $f(u,v) = ((2+3\cos(2\pi v))\cos(2\pi u), (2+3\cos(2\pi v))\sin(2\pi u), 3\sin(2\pi v)\cos(\pi u), 3\sin(2\pi v)\sin(\pi u))$, définit un plongement de K dans $\mathbb{R}^4$.

Commentaire : Il n'existe pas de plongement de K dans $\mathbb{R}^3$ c'est dû au fait que, comme le ruban de Möbius, K n'est pas orientable ou si on veut n'a « qu'une face ».