Université Bordeaux 1 Année 2007-2008
Master 1 de mathématiques

1er Devoir Maison
Géométrie differentielle.
Correction

1. *Soient $r \in \mathbb{R}$ et F_r l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note $[x : y]$ son image dans $P^1_{\mathbb{R}}$. Montrer que les applications $f_r : P^1_{\mathbb{R}} \to P^1_{\mathbb{R}}$ définies par $f_r([x : y]) = [f_r(x, y)]$ sont des difféomorphismes lisses.*

Pour voir qu'une application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même passe au quotient en une application de $P^1_{\mathbb{R}}$ dans lui-même, il suffit de vérifier que deux vecteurs colinéaires non-nuls ont des images non-nulles et colinéaires. C'est évidemment le cas si on a affaire, comme ici, à des applications linéaires inversibles.

De plus, comme $f_r \circ f_s = f_{r+s}$ et $f_0 = \mathrm{id}$, il suffit de montrer de montrer que les f_r sont lisses pour montrer qu'il s'agit de difféomorphismes. Pour le voir on exprime f_r dans les cartes :

$$\begin{array}{ll} \phi_0 \circ f_r \circ \phi_0^{-1}(x) = \frac{x}{1+rx} & \text{si } x \neq -\frac{1}{r} \\ \phi_1 \circ f_r \circ \phi_0^{-1}(x) = \frac{1+rx}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \phi_1 \circ f_r \circ \phi_1^{-1}(x) = x + r & \end{array}$$

On voit que $f_r(U_1) = U_1$, que $f_r(U_0) = f_r(P^1_{\mathbb{R}} \setminus \{[0 : 1]\}) = P^1_{\mathbb{R}} \setminus \{[r : 1]\}$ car f_r est une bijection.

Dorénavant on notera simplement f l'application f_1. Soit $\{(U_0, \phi_0); (U_1, \phi_1)\}$ l'atlas usuel de $P^1_{\mathbb{R}}$. Déterminer $f(U_0)$, $f(U_1)$. Pour tout $[x : y] \in P^1_{\mathbb{R}}$, étudier les suites $\big(f^n([x : y])\big)_n$ et $\big(f^{-n}([x : y])\big)_n$.

Soit $[x : y] \in P^1_{\mathbb{R}}$, on a $f^n([x : y]) = [x + ny : y]$. Pour $n \neq -\frac{x}{y}$, on a $[x + ny : y] = [1 : \frac{y}{x+ny}]$ et donc les deux suites tendent vers $[1 : 0]$. Remarque : si on regarde la situation depuis la carte (U_1, ϕ_1) on voit des suites qui tendent vers l'infini $(x + n)_n$ et $(x - n)_n$.

2. *Montrer que l'on définit une action du groupe $\mathbb{Z}$ sur $P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ en posant $n.([x : y], t) = (f^n([x : y]), t + n)$. On note X l'ensemble quotient de $P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$, autrement dit l'ensemble obtenu en quotientant par la relation d'équivalence $([x : y], t) \simeq ([x' : y'], t') \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, ([x' : y'], t') = n.([x : y], t)$. On note p la projection de $P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ dans X.*

Pour tout $(i, j) \in \{0, 1\}^2$, on pose $V_{i,j} = p\big(U_i \times]\frac{j}{2}, 1 + \frac{j}{2}[\big)$. En utilisant p, les quatre $V_{i,j}$ et l'atlas usuel de $P^1_{\mathbb{R}}$, construire un atlas de X (on pourra n'expliciter que les trois changements de cartes concernant $V_{0,0}$).

Montrer que X est compacte.

On commence par remarquer que $p_{|V_{i,j}}$ est une bijection sur son image. On pose $\psi_{i,j} = \widetilde{\phi}_i \circ (p|_{V_{i,j}})^{-1}$, avec $\widetilde{\phi}_i : U_i \times]\frac{j}{2}, 1 + \frac{j}{2}[\to \mathbb{R} \times]\frac{j}{2}, 1 + \frac{j}{2}[$ est défini par $\widetilde{\phi}_i([x : y], t) = (\phi_i([x : y]), t)$. On veut montrer que $\{(V_{i,j}, \psi_{i,j})\}$ est un atlas. Il est clair que $\bigcup V_{i,j} = X$. Montrons que les changements de cartes sont lisses.

On commence par $\psi_{0,1} \circ \psi_{0,0}^{-1}$. Il faut tout d'abord déterminer $\psi_{0,0}(V_{0,0} \cap V_{0,1})$. On a

$$p^{-1}(p(U_0 \times]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_0) \times]\frac{1}{2} + n, \frac{3}{2} + n[,$$

donc

$$(U_0 \times]0, 1[) \bigcap p^{-1}(p(U_0 \times]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[)) = U_0 \times]\frac{1}{2}, 1[\bigcup (f^{-1}(U_0) \cap U_0) \times]0, \frac{1}{2}[,$$

donc

$$V_{0,0} \cap V_{0,1} = p\left(U_0 \times]\frac{1}{2}, 1[\cup (f^{-1}(U_0) \cap U_0) \times]0, \frac{1}{2}[\right) \qquad (*)$$

et

$$\psi_{0,0}(V_{0,0} \cap V_{0,1}) = \mathbb{R} \times]\frac{1}{2}, 1[\cup (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times]0, \frac{1}{2}[.$$

On a bien un ouvert. En utilisant que les points d'une orbite ont même projeté, $(*)$ donne

$$V_{0,0}\cap V_{0,1}=p\big(U_0\times]\frac{1}{2},1[\,\cup\,(f(U_0)\cap U_0)\times]1,\frac{3}{2}[\big),$$

et donc

$$\psi_{0,1}(V_{0,0}\cap V_{0,1})=\mathbb{R}\times]\frac{1}{2},1[\,\cup\,(\mathbb{R}\setminus\{1\})\times]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[.$$

Pour écrire le changement de carte il suffit de remarquer que si $(a,t)\in\psi_{0,0}(V_{0,0}\cap V_{0,1})$ et si $(b,s)\in\psi_{0,1}(V_{0,0}\cap V_{0,1})$ alors $\psi_{0,1}\circ\psi_{0,0}^{-1}(a,t)=(b,s)$ si et seulement si $p(\big[1:a\big],t)=p(\big[1:b\big],s)$. Ainsi

$$\begin{cases}\psi_{0,1}\circ\psi_{0,0}^{-1}(a,t)=(a,t) & \text{si } t\in]\frac{1}{2},1[\\ \psi_{0,1}\circ\psi_{0,0}^{-1}(a,t)=(\frac{a}{1+a},t+1) & \text{si } t\in]0,\frac{1}{2}[\end{cases}$$

On a utilisé $\phi_0\circ f_1\circ\phi_0^{-1}(x)=\frac{x}{1+x}$ si $x\neq-1$.

Ce qui nous fait un changement de carte explicité ! Il est clairement lisse.

La tâche consistant à expliciter les autres changements de cartes est laissée au lecteur…On remarquera que cette question n'est (presque) que torture gratuite l'action de $\mathbb{Z}$ étant clairement discontinue on sait, grâce au cours, que X est une variété et que les $(V_{i,j},\psi_{i,j})$ forment un atlas.

Montrons que X est séparée.
Prenons deux points distincts m et m' dans X. Il existe $(\big[x:y\big],t)$et $(\big[x':y'\big],t')$ tels que $p(\big[x:y\big],t)=m$, $p'(\big[x':y'\big],t')=m'$ et $|t-t'|=2.\delta<1$.
Si $t\neq t'$ il est facile de voir que pour tout $k\in\mathbb{Z}$ on a

$$\Big(k.\,(P^1_{\mathbb{R}}\times]t-\delta,t+\delta[)\,\Big)\bigcap\Big(P^1_{\mathbb{R}}\times]t'-\delta,t'+\delta[\Big)=\emptyset.$$

La projection p étant ouverte $p(P^1_{\mathbb{R}}\times]t-\delta,t+\delta[)$ et $p(P^1_{\mathbb{R}}\times]t'-\delta,t'+\delta[)$ sont deux ouverts disjoints de X.
Si $t=t'$ on considère deux voisinages ouverts disjoints U et U' de $\big[x:y\big]$ et de $\big[x':y'\big]$ dans $P^1_{\mathbb{R}}$. On montre de la même façon que $p(U\times]t-\frac{1}{4},t+\frac{1}{4}[)$ et $p(U'\times]t-\frac{1}{4},t+\frac{1}{4}[)$ sont deux ouverts disjoints.

Pour la compacité, on remarque simplement que $X=p(P^1_{\mathbb{R}}\times[0,1])$.

3. *Montrer que la projection $\pi:P^1_{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définit une submersion $\overline{\pi}$ de X dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}=S^1$. Montrer que pour tout $\theta\in S^1$ l'ensemble $\overline{\pi}^{-1}(\theta)$ est une sous-variété compacte de dimension 1 difféomorphe à $P^1_{\mathbb{R}}$ (et donc à S^1). En déduire l'existence d'une partition de X en cercle.*

On va faire mieux : montrer que $\overline{\pi}$ définit une fibration. Par construction p est un difféomorphisme local sa restriction à $P^1_{\mathbb{R}}\times]0,1[$ est injective et induit donc un difféomorphisme de $P^1_{\mathbb{R}}\times]0,1[$ sur son image. Il est par ailleurs clair que $p(P^1_{\mathbb{R}}\times]0,1[)=\overline{\pi}^{-1}(]0,1[)$. De plus $\overline{\pi}\circ p_{|_{P^1_{\mathbb{R}}\times]0,1[}}=\pi_{|_{P^1_{\mathbb{R}}\times]0,1[}}$ (on a identifié les segments ouverts $]0,1[$ de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). On recommence avec la restriction de p à $P^1_{\mathbb{R}}\times]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$. Ce qui montre que $\overline{\pi}:X\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est une fibration localement triviale de fibre $P^1_{\mathbb{R}}$. Ce qui, en particulier, répond à la question.

4. *Montrer que l'application $i_{[x:y]}:\mathbb{R}\to X$ définie par $i_{[x:y]}(t)=p(\big[x:y\big],t)$ est une immersion.*

Soit $(\big[x:y\big],t)\in P^1_{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}$, soit k un entier, on a $p(\big[x:y\big],t)=p(f^{-k}\big[x:y\big],t-k)$. Si $\big[x:y\big]\in U_1$ et $t\in]k,k+1[$, alors $(f^{-k}(\big[x:y\big]),t-k)\in U_1\times]0,1[$, on a donc

$$\psi_{1,0}\circ i_{[x:y]|_{]k,k+1[}}(t)=(\phi_1(f^{-k}(\big[x:y\big])),t-k)=(\frac{x}{y}-k,t-k).$$

De même si $t\in]k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}[$, on a $\psi_{1,1}\circ i_{[x:y]|_{]k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}[}}(t)=\phi_1(f^{-k}(\big[x:y\big]),t-k)$.

Ce qui montre que si $\big[x:y\big]\neq\big[1:0\big]$ alors $i_{[x:y]}$ est une immersion. Le cas restant fait l'objet de la question suivante.

a) *Montrer que si $\big[x:y\big]=\big[1:0\big]$, alors $i_{[x:y]}(\mathbb{R})$ est une sous-variété difféomorphe à S^1.*

Tout d'abord remarquons que pour tout entier k, on a $f^k(\big[1:0\big])=\big[1:0\big]$. On peut donc d'une part reproduire la preuve précédente pour montrer que $i_{[1,0]}$ est une immersion, d'autre part on voit que $i_{[1:0]}(t+k)=i_{[1:0]}(t)$: l'application passe au quotient en une application $\bar{\imath}_{[1:0]}$, clairement injective, de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans X. Cette nouvelle application est encore une immersion (car la projection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un difféomorphisme local), la variété $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compacte donc $\bar{\imath}_{[1:0]}$ est un plongement.

b) *Montrer que si $\big[x:y\big]\neq\big[1:0\big]$, alors $i_{[x:y]}$ est injective. Soit $(t_n)_n$ une suite tendant vers $\pm\infty$. Prouver que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\big(i_{[x:y]}(t_n)\big)_n$ est contenu dans $i_{[1:0]}(\mathbb{R})$. Montrer que $i_{[x:y]}$ est un plongement.*

Si $t-t'\notin\mathbb{Z}$ alors $\overline{\pi}\circ i_{[x:y]}(t)\neq\overline{\pi}\circ i_{[x:y]}(t')$ et donc $i_{[x:y]}(t)\neq i_{[x:y]}(t')$.
Si $t-t'=k\in\mathbb{Z}$, on a vu que $i_{[x:y]}(t)=p(f^{-k}(\big[x:y\big]),t-k)=p(f^{-k}(\big[x:y\big]),t')$; mais $p(\big[x:y\big],t')=p(f^{-k}(\big[x:y\big]),t')$ si et seulement si $\big[x:y\big]=f^{-k}(\big[x:y\big])$. Ce qui ne laisse que deux possibilités $\big[x:y\big]=\big[1:0\big]$ ou $k=0$, la première étant exclue on a $k=0$ et l'application est injective.

Rappelons nous que $\lim_{n\to\pm\infty}f^n(\big[x:y\big])=\big[1:0\big]$. Prenons une suite $(t_n)_n$ tendant vers l'infini, X étant compacte on peut extraire une sous-suite convergente de $(i_{[x:y]}(t_n))_n$ que l'on désigne toujours $(i_{[x:y]}(t_n))_n$ pour ne pas alourdir. On sait que

$$i_{[x:y]}(t_n)=p(f^{-\mathrm{E}(t_n)}(\big[x:y\big]),t_n-\mathrm{E}(t_n)),$$

où E désigne la partie entière. Lorsque t_n tend vers l'infini, $\mathrm{E}(t_n)$ tend aussi vers l'infini et $\lim_{n\to\infty}i_{[x:y]}(t_n)\in i_{[1:0]}(\mathbb{R})$.

On a une immersion injective mais comme $\mathbb{R}$ n'est pas compacte, il ne s'agit pas forcément d'un plongement ! On va montrer que $i_{[x:y]}(\mathbb{R})$ est une sous-variété de X on pourra alors voir $i_{[x:y]}$ comme une immersion bijective entre deux variétés de même dimension ($\mathbb{R}$ et $i_{[x:y]}(\mathbb{R})$) c.-à-d. un difféomorphisme.
On sait déjà que $i_{[x:y]}(\mathbb{R})$ est contenu dans $V_{1,0}\cup V_{1,1}$, donc pour montrer qu'il s'agit d'une sous-variété il suffit donc de montrer que $\psi_{1,0}(i_{[x:y]}(\mathbb{R})\cap V_{1,0})$ et $\psi_{1,1}(i_{[x:y]}(\mathbb{R})\cap V_{1,1})$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}\times]0,1[$ et de $\mathbb{R}\times]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$ respectivement.
Or d'après ce qui précède $\psi_{1,0}(i_{[x:y]}(\mathbb{R})\cap V_{1,0})=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\{\frac{x}{y}-k\}\times]0,1[)$ et $\psi_{1,1}(i_{[x:y]}(\mathbb{R})\cap V_{1,1})=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\{\frac{x}{y}-k\}\times]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[)$. Il est clair dans les deux cas que l'on a affaire à des sous-variétés. Ce qui termine la preuve.

c) *Montrer que pour tout $(\big[x:y\big],\big[x':y'\big])$ on a soit $i_{[x:y]}(\mathbb{R})=i_{[x':y']}(\mathbb{R})$ ou $i_{[x:y]}(\mathbb{R})\cap i_{[x':y']}(\mathbb{R})=\emptyset$. En déduire l'existence d'une nouvelle partition de X en sous-variétés de dimension 1.*

Si $i_{[x:y]}(\mathbb{R})\cap i_{[x':y']}(\mathbb{R})\neq\emptyset$ il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $f^k(\big[x:y\big])=\big[x':y'\big]$ il est alors facile de montrer que $i_{[x:y]}(\mathbb{R})=i_{[x':y']}(\mathbb{R})$. La déduction est immédiate.

5. *Qu'est ce qui laissait prévoir l'existence de ces deux partitions dans l'atlas de X ?*

la forme des changements de cartes : ils préservent les directions horizontales et les direction verticales (autrement dit leurs jacobiennes sont diagonales).

6. *Soit $\Psi:P^1_{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}\to P^1_{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}$ définie par $\Psi(\big[x:y\big],t)=(f_t(\big[x:y\big]),t)$ permet de définir un difféomorphisme de $P^1_{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire du tore) sur X. Quel est l'intérêt d'une telle présentation (celle donnant X) du tore ?*

Pour tout entier k, on a $\Psi(\big[x:y\big],t+k)=(f_{t+k}(\big[x:y\big]),t+k)=k.\Psi(\big[x:y\big],t)$, l'application Ψ passe donc au quotient en une application $\overline{\Psi}$ de $P^1_{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans X. On remarque que Ψ est bijective et que $\Psi^{-1}(\big[x:y\big],t) = ((f_{-t}(\big[x:y\big]),t)$. En utilisant un atlas de $P^1_{\mathbb{R}}$ on voit que Ψ et Ψ^{-1} sont lisses. Il s'agit donc de difféomorphismes. Ψ étant bijective, $\overline{\Psi}$ l'est aussi. Il reste à montrer que $\overline{\Psi}$ est un difféomorphisme local cela vient du fait que les projections de $P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ dans X et dans $P^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont des difféomorphismes locaux.

Alors pourquoi une présentation si compliquée du tore ? Dans la présentation habituelle du tore on ne voit pas apparaitre la partition (on dit dans ce cas le feuilletage) par les sous-variétés $i_{[x:y]}(\mathbb{R})$. La variété où vit ce feuilletage est X qui se trouve être difféomorphe à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (on pourrait d'ailleurs modifier notre famille f_t pour obtenir une bouteille de Klein). Il serait certainement instructif mais sans doute pénible d'écrire ces variétés dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.