MHT 513 2007-2008 Devoir1

Quelques indications de solution

Exercice 1.

L' application f est linéaire (à vérifier), continue ($\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie) donc différentiable.

L' application g est n-linéaire (par définition du déterminant), également continue donc différentiable.

On sait que $Df(M) \cdot H = (H \cdot e_1, \dots, H \cdot e_n)$ et $Dg((x_1, \dots, x_n) \cdot (h_1, \dots, h_n) = g(h_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + g(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n)$. Bien sur, $g \circ f(M) = \det M$ donc par application du théorème de composition $D \det(M) \cdot H = \det(H \cdot e_1, M \cdot e_2, \dots, M \cdot e_n) + \dots + \det(M \cdot e_1, \dots, M \cdot e_{n-1}, H \cdot e_n)$. La formule suivante s'obtient en écrivant les termes de la diagonale de la matrice $\widetilde{X}^t H$ et en les interprétant comme un déterminant.

Exercice 2.

a) Soit f une application différentiable sur un ouvert Ω et x_0 un point de l' ouvert Ω en lequel f admet un extremum local. On peut supposer que f admet un maximum local en x_0. Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que la boule $B(x_0, \alpha)$ soit incluse dans Ω et tel que pour tout $x \in E$, $\|x - x_0\| < \alpha$, $f(x) \leq f(x_0)$. Soit h un vecteur non nul de E, pour tout réel $t,\ 0 \leq t < \frac{\alpha}{\|h\|}$, $f(x_0 + th) - f(x_0) \leq 0$; Puisque f est différentiable en x_0, f admet une dérivée dans la direction du vecteur h, or $\lim_{t \to 0,\, t > 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \leq 0$ et $\lim_{t \to 0,\, t < 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \geq 0$ donc $\partial_h f(x_0) = 0$, mais $\partial_h f(x_0) = Df(x_0) \cdot h$. Il en résulte que $Df(x_0) \cdot h = 0$ pour tout h et $Df(x_0) = 0$.

b) La fonction f atteint son maximum et son minimum en des points x_0 et $x_1$appartenant à $\bar{U}$; Si ces deux points appartiennent à la frontière de U, le maximum et le minimum de f sur $\bar{U}$ sont tous les deux nuls et f est nulle sur U donc de différentielle nulle. Si l' un des deux points x_0 ou $x_1$appartient à U, la différentielle de f y est nulle d' après ce qui précède.

Exercice 3.

i) L'application g est à valeurs dans un produit. Les deux applications composantes $(x_1, x_2) \longmapsto f(x_1)$ et $(x_1, x_2) \longmapsto f(x_2)$ sont différentiables comme composées d' applications différentiables. La première est la composée de $(x_1, x_2) \longmapsto x_1$ et de f, la seconde est la composée de $(x_1, x_2) \longmapsto x_2$ et de f.

ii) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f(a+h) = f(a) + h \int_0^1 f'(a+th)dt = f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h \int_0^1 (f'(a+th) - f'(a))dt$.

iii) routine

iv) f est continue et $f(0) = 0$ donc, si $x = (x_n)_n \in c_0$, $(f(x_n))_n \in c_0$.

Soit $h = (h_n) \in c_0$, $\Phi(x+h) = (f(x_n + h_n))_n = (f(x_n) + h_n f'(x_n) + (h_n \int_0^1 (f'(x_n + th_n) - f'(x_n))dt)_n$, soit

$\Phi(x+h) = \Phi(x) + (h_n f'(x_n))_n + ((h_n \int_0^1 (f'(x_n + th_n) - f'(x_n))dt)_n$.

Posons $L(h) = (h_n f'(x_n))_n$ et $R(h) = (h_n \int_0^1 (f'(x_n + th_n) - f'(x_n))dt)_n$. L' application L est linéaire. L' ensemble $\{x_n\}$ est contenu dans un intervalle compact $[-\beta, \beta]$ et f est continue donc, il existe un réel $M > 0$ tel que $|f'(x_n)| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\|(h_n f'(x_n))_n\| = \|L(h)\| \leq M\|h\|$. L' ensemble $[-\beta - 1, \beta + 1]$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc f' y est uniformément continu . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ tel que pour $t,\ 0 \leq t \leq 1$, et tout $h,\ \|h\| < \alpha$, on ait $|f'(x_n + th_n) - f'(x_n)| < \varepsilon$; La conséquence est que pour $\|h\| < \alpha$, on a $\|R(h)\| \leq \varepsilon \|h\|$ et donc que $\lim_{h \to 0,\, h \neq 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$. Ceci prouve que Φ est différentiable et $D\Phi(x) \cdot h = (h_n f'(x_n))_n$.