Université Bordeaux 1 Année 2007-2008
Master 1 de mathématiques

Devoir Maison 2
Géométrie differentielle.

Rappels-notations : Si f est une application lisse entre deux variétés X et Y, Tf désignera l'application linéaire tangente à f. On notera $\chi(X)$ l'ensemble des champs des champs de vecteurs lisses de X. Si f est un difféomorphisme et v un champ de vecteurs lisse sur X (c'est-à-dire une section lisse du fibré tangent) f_*v désigne l'image de v par f. Par définition $f_*v = Tf \circ v \circ f^{-1}$, on voit que f_*v est un champ de vecteurs lisse sur Y.

Exercice 1.

(1) Soient E, F et G trois espaces vectoriels, et soient $\alpha : E \to F$ et $\beta : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que si β est surjective et si $\mathrm{Im}\ \alpha + \ker \beta = F$ alors $\beta \circ \alpha$ est surjective.

(2) Soit $f : X \to Y$ une application lisse entre deux variétés et soit Σ une sous-variété de Y. Montrer que si pour tout $x \in f^{-1}(\Sigma)$, $\mathrm{Im}\ Tf(x) + T_{f(x)}\Sigma = T_{f(x)}Y$ alors $f^{-1}(\Sigma)$ est une sous-variété de X [On pourra commencer par supposer que Σ est la fibre d'une submersion].

(3) Soit Σ et Σ' deux sous-variétés de Y. Déduire de ce qui précède que si pour tout $X \in \Sigma \cap \Sigma'$ on a $T_x\Sigma + T_x\Sigma' = T_xY$ alors $\Sigma \cap \Sigma'$ est une sous-variété de Y [on commencera par montrer que l'on a une sous-variété de Σ]. Quelle est sa dimension ?

(4) Question facultative :
Montrer que si l'intersection (non-vide) d'un cylindre (vertical de base circulaire) C et de la sphère unité S (tout deux dans R^3 euclidien) n'est pas une sous-variété de R^3 alors $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = (1 - \sqrt{a^2 + b^2})^2\}$ avec $a^2 + b^2 < 1$.
Lorsque $(a, b) = (1/2, 0)$, montrer que $C \cap S$ n'est effectivement pas une sous-variété lisse de $\mathbf{R}^3$ [on pourra regarder les vecteurs tangents à $C \cap S$ en $(1, 0, 0)$].

Exercice 2. Soit X une variété et Γ un groupe agissant sur X de façon lisse discontinue et « séparante[1] ». On note X/Γ la variété quotient et π la projection associée. On rappelle que $(X, \pi, X/\Gamma)$ est un revêtement lisse.

(1) Soit $x \in X$. On note $\bar{x}$ le point de X/Γ égal à $\pi(x)$. Soit $U_{\bar{x}}$ un voisinage ouvert de $\bar{x}$. Montrer que pour $U_{\bar{x}}$ petit il existe une *unique* application lisse σ_x de $U_{\bar{x}}$ dans X telle que $\pi \circ \sigma_x = \mathrm{id}_{U_{\bar{x}}}$ et $\sigma_x(\bar{x}) = x$.

(2) Montrer que σ_x est un difféomorphisme local. En déduire que $V_x = \sigma_x(U_{\bar{x}})$ est un ouvert.

(3) Soit $v \in \chi(X/\Gamma)$ i.e. un champ de vecteurs sur X/Γ. Pour tout $x \in X$ on pose $\widetilde{v}_{|V_x} = (\sigma_x)_* v_{|U_{\bar{x}}}$. Montrer que l'on définit ainsi un élément $\widetilde{v}$ de $\chi(X)$. On appelle $\widetilde{v}$ le relevé de v à X.

(4) Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $T\pi(\gamma(x)).T\gamma(x).\widetilde{v}(x) = T\pi(\gamma(x)).v(\gamma(x))$. En déduire $\gamma_*\widetilde{v} = \widetilde{v}$.

(5) Soit $u \in \chi(X)$. Montrer que si pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\gamma_* u = u$ alors il existe $\overline{u} \in \chi(X/\Gamma)$ tel que pour tout $x \in X$ on a $T\pi(x).u(x) = \overline{u}(\bar{x})$. On dit que u est projetable.

(6) Décrire les relevés des champs de vecteurs de $\mathbf{T}^n$ à $\mathbf{R}^n$. En déduire que $\mathbf{T}^n$ est parallélisable.

(7) Si X n'est pas parallélisable, la variété X/Γ peut-elle l'être ?

[1] i.e. l'espace quotient est séparé.