Université Bordeaux 1, **Licence de Mathématiques Pures.**
2007-2008.

Calcul différentiel et Equations différentielles
DM 2, à rendre semaine 47

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}.$$
1) Exprimer $Df(x,y)$.
2) Déterminer $\|Df(x,y)\|$.
3) Exprimer $D^2f(1,0)$.
4) Déterminer les points critiques de f.
5) Déterminer les extrema locaux de f et préciser leur nature.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que
$$\forall x \in E, \quad f(x) > 0,$$
et
$$\forall x \in E, \quad \|D^2f(x)\| \leq M,$$
où M est une constante et
$$\|D^2f(x)\| = \sup\{|D^2f(x)(h,k)| \ : \ (h,k) \in E^2, \ \|h\| \leq 1 \text{ et } \|k\| \leq 1\}.$$
Soit $a \in E$.
1) Montrer que pour tout $h \in E$ et pour tout réel $s > 0$, on a
$$Df(a).h = \frac{f(a)}{s} - \frac{f(a-sh)}{s} + s\int_0^1 (1-t)D^2f(a-tsh)(h,h)dt.$$
2) Montrer que pour tout $a \in E$ et pour tout réel $s > 0$, on a
$$Df(a).h \leq \frac{f(a)}{s} + \frac{sM}{2}\|h\|^2.$$
3) En déduire que
$$\|Df(a)\| \leq \sqrt{2Mf(a)}.$$

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable dans Ω. On appelle le Laplacien de f la fonction définie par
$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega.$$
On dit que f est harmonique dans Ω si $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.
1) Donner un exemple d'une fonction non constante et harmonique dans Ω et un exemple d'une fonction non harmonique.
2) On suppose que f est harmonique. Montrer que si f^2 est harmonique alors f est constante.
3) Soit A une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui même et soit $g = f \circ A$ définie dans l'ouvert $A^{-1}(\Omega)$.

i) Montrer que g est deux fois différentiable. Pour $x \in \Omega$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ déterminer $D^2g(x)(h,k)$ en fonction de la différentielle seconde de f et de A.

ii) Soit $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit A l'application définie par $A.e_k = e_{n-k}$, $1 \leq k \leq n$.
Montrer que si f est harmonique dans Ω alors g est harmonique dans $A^{-1}(\Omega)$.