Université Bordeaux 1 — Année 2007-2008

L3 Mathématiques

Calcul différentiel, DM 3

Équations différentielles.

(1) Soit $x' = f(x)$ une équation différentielle *autonome* de classe C^1 (f ne depend pas de t). Soient (ϕ_0, I) une solution maximale de cette équation, t_0 un élément de I et (ϕ_1, J) une solution maximale telle que $\phi_1(0) = \phi_0(t_0)$. Montrer que

$$\forall t \in J,\ t + t_0 \in I \text{ et } \phi_1(t) = \phi_0(t + t_0).$$

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2y, -2x - 4x^3 - y)$ et $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $L(x, y) = x^2 + y^2 + x^4$.

(a) Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ l'équation $(x', y') = f(x, y)$ possède une unique solution maximale notée (ϕ_v, I_v) vérifiant $\phi_v(0) = v$. Montrer que si $v \neq (0, 0)$ alors $\forall t \in I_v,\ \phi_v(t) \neq (0, 0)$.

On se donne dorénavant $v_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et $(t^-, t^+) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $I_{v_0} =]t^-, t^+[$.

(b) Montrer que $L \circ \phi_{v_0}$ est *strictement* décroissante et que pour tout réel a, $L^{-1}(] - \infty, a])$ est compact. Que peut-on en déduire concernant t^+ ? Que peut-on dire de $\lim_{t\to t^+} L \circ \phi_{v_0}(t)$?

(c) Soit $\mathcal{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < L(x_0, y_0) + 1\}$. Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert relativement compact et que $\phi_{v_0}([0, +\infty[) \subset \mathcal{O}$. En déduire que la restriction de f à $\mathcal{O}$ est lipschitzienne et

$$\exists K > 0, \forall (v, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \forall T > 0, \|\phi_v(T) - \phi_w(T)\| \leq e^{KT}\|v - w\|.$$

(d) Soit $(t_n)_n$ une suite réelle tendant vers $+\infty$, montrer qu'il existe une sous-suite $(t_{n_k})_k$ telle que $(v_k)_k = (\phi_{v_0}(t_{n_k}))_k$ est convergente, on note sa limite v_∞.

Soit $T > 0$, montrer que

$$L(\phi_{v_\infty}, T) = \lim_{k\to\infty} L\left(\phi_{v_0}(t_{n_k} + T)\right).$$

Comparer $L(\phi_{v_\infty}, T)$ et $L(v_\infty)$.

Conclure.