Université Bordeaux 1 Année 2007-2008
L3 Mathématiques

Calcul différentiel, DM 3

Équations différentielles.

1) *Soit $x' = f(x)$ une équation différentielle* autonome *de classe C^1 (f ne depend pas de t)* sur un espace vectoriel de dimension finie. *Soient (ϕ_0, I) une solution maximale de cette équation, t_0 un élément de I et (ϕ_1, J) une solution maximale telle que $\phi_1(0) = \phi_0(t_0)$. Montrer que*

$$\forall t \in J,\ t + t_0 \in I \text{ et } \phi_1(t) = \phi_0(t + t_0).$$

Commençons par montrer que $\psi : t \mapsto \phi_0(t + t_0)$ est une solution de l'équation, définie sur $I' = \{t \in \mathbb{R} \mid t + t_0 \in I\}$. C'est le cas car :

$$\psi'(t) = \phi_0'(t + t_0) = f(\phi_0(t + t_0)) = f(\psi(t)).$$

On remarquera que l'on a utilisé le fait que l'équation est autonome. De plus, par le même procédé, toute extension de cette solution donnerait une extension de (ϕ_0, I). Or (ϕ_0, I) est maximale donc (ψ, I') aussi.
Enfin f est localement lipschitzienne donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation $x' = f(x)$ possède une unique solution maximale vérifiant $\phi_1(0) = \phi_0(t_0)$. Ainsi $(\phi_1, J) = (\psi, I')$.

2) *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2y, -2x - 4x^3 - y)$ et $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $L(x, y) = x^2 + y^2 + x^4$.*

a) Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ l'équation (E) : $(x', y') = f(x, y)$ possède une unique solution maximale notée (ϕ_v, I_v) vérifiant $\phi_v(0) = v$. Montrer que si $v \neq (0, 0)$ alors $\forall t \in I_v$, $\phi_v(t) \neq (0, 0)$.

La fonction f est C^1, l'espace de départ est de dimension finie donc f est localement lipschitzienne. Le problème de Cauchy de l'énoncé possède donc une unique solution maximale. Par ailleurs, comme $f(0, 0) = (0, 0)$, il est clair que la fonction $\phi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi_0(t) = 0$ est une solution de (E) donc s'il existe $t \in I$ tel que $\phi_v(t) = (0, 0) = \phi_0(t)$ alors $\phi_v = \phi_0$ et $v = (0, 0)$ par unicité des solutions maximales.

On se donne dorénavant $v_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et $(t^-, t^+) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $I_{v_0} =]t^-, t^+[$.

b) Montrer que $L \circ \phi_{v_0}$ est strictement *décroissante et que pour tout réel a, $L^{-1}(]-\infty, a])$ est compact. Que peut-on en déduire concernant t^+ ? Que peut-on dire de $\lim_{t \to t^+} L \circ \phi_{v_0}(t)$?*

Soit $x(t)$ et $y(t)$ définis par $\phi_{v_0}(t) = (x(t), y(t))$. En utilisant $\phi_{v_0}'(t) = f(\phi_{v_0}(t))$, on a

$$\begin{aligned} L \circ \phi_{v_0}'(t) &= DL(\phi_{v_0}(t)).\phi_{v_0}'(t) = (2x(t) + 4x^3(t))x'(t) + (2y)y'(t) \\ &= (2x(t) + 4x^3(t))(2y) + (2y)(-2x(t) - 4x^3(t) - y(t)) \\ &= -2y^2(t). \end{aligned}$$

On en déduit que $L \circ \phi_{v_0}$ est décroissante. Supposons qu'elle ne le soit pas strictement, il existe alors s et s' distincts tels que $(L \circ \phi_{v_0})_{|[s,s']}$ est constante et donc pour tout $t \in]s, s'[$, $L \circ \phi_{v_0}'(t) = 0$ et donc $y(t) = 0$. Mais alors $-2x(t) - 4x^3(t) - y(t) = y'(t) = 0$ et comme $4x^2(t) + 2$ ne s'annule pas on a $x(t) = 0$ ce qui est impossible d'après a). On déduit que $L \circ \phi_{v_0}$ est strictement décroissante.

Le sous-ensemble $L^{-1}(]-\infty, a])$ est clairement fermé, de plus $L(v) \geq \|v\|^2$ donc la boule fermée de centre 0 et de rayon $\sqrt{a}$ le contient. Il est donc compact.

On a donc $\forall t \in [0, t^+[, \phi_{v_0}(t) \in L^{-1}(]-\infty, L(v_0)])$ qui est compact. On en déduit facilement (...) qu'il existe une suite $(t_n)_n$ tendant vers t^+ telle que $(\phi_{v_0}(t_n))_n$ converge vers une limite l. Si $t^+ < +\infty$, f étant localement lipschitzienne on peut appliquer le théorème des bouts, il nous dit que (t^+, l) appartient au bord du domaine de définition de f (considérée comme une application de 3 variables t, x et y), c'est absurde car celui-ci est vide. Donc $t^+ = +\infty$. Enfin, on sait que $\lim_{t \to t^+} L \circ \phi_{v_0}(t)$ existe car la fonction est monotone.

c) Soit $\mathcal{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < L(x_0, y_0) + 1\}$. Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert relativement compact et que $\phi_{v_0}([0, +\infty[) \subset \mathcal{O}$. En déduire que la restriction de f à $\mathcal{O}$ est lipschitzienne et

$$\exists K > 0, \forall (v, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \forall T > 0, \|\phi_v(T) - \phi_w(T)\| \leq e^{KT} \|v - w\|.$$

$\mathcal{O}$ est un ouvert relativement compact car c'est une boule ouverte d'un espace de dimension finie et la question précédente nous dit que $\phi_{v_0}([0, +\infty[) \subset \mathcal{O}$. La fonction f est de classe C^1 donc la norme de sa différentielle est bornée par un réel K sur $\mathcal{O}$ qui est convexe et donc par le théorème des accroissements finis elle est K-lipschitzienne[1] sur $\mathcal{O}$. On considère alors l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R} \times \mathcal{O}$ définie par $v' = f_{|\mathcal{O}}(v)$. Il est clair que $\phi_{v_0}|_{]0,+\infty[}$ est une solution de (E'). L'inégalité demandée[2] n'est alors qu'une application directe du théorème de comparaison de solutions d'équations differentielles.

d) Soit $(t_n)_n$ une suite réelle tendant vers $+\infty$, montrer qu'il existe une sous-suite $(t_{n_k})_k$ telle que $(v_k)_k = (\phi_{v_0}(t_{n_k}))_k$ est convergente, on note sa limite v_∞.
Soit $T > 0$, montrer que

$$L(\phi_{v_\infty}(T)) = \lim_{k \to \infty} L\left(\phi_{v_0}(t_{n_k} + T)\right).$$

Comparer $L(\phi_{v_\infty}(T))$ et $L(v_\infty)$. Conclure.

La suite $(\phi_{v_0}(t_n))_n$ est à valeurs dans un compact donc on peut en extraire une sous-suite convergente que l'on note $(\phi_{v_0}(t_{n_k}))_k$ ou $(v_k)_k$. On note sa limite v_∞. D'après la partie **1)** on sait que $\phi_{v_0}(t_{n_k} + T) = \phi_{v_k}(T)$, mais d'après c) $\|\phi_{v_k}(T) - \phi_{v_\infty}(T)\| \leq e^{KT} \|v_k - v_\infty\|$ comme L est continue on en déduit

$$L(\phi_{v_\infty}(T)) = \lim_{k \to \infty} L\left(\phi_{v_0}(t_{n_k} + T)\right).$$

Au a) on a vu que $\lim_{t \to +\infty} L \circ \phi_{v_0}(t)$ existe. Ainsi

$$L(\phi_{v_\infty}(T)) = \lim_{k \to \infty} L\left(\phi_{v_0}(t_{n_k} + T)\right) = \lim_{k \to \infty} L\left(\phi_{v_0}(t_{n_k})\right) = L(v_\infty).$$

Mais on y a aussi vu que si $v_\infty \neq (0, 0)$ alors $L(\phi_{v_\infty}(T)) < L(v_\infty)$. On a donc $v_\infty = (0, 0)$.

Ce qui montre que toutes les solutions de (E) tendent vers $(0, 0)$ quand t tend vers l'infini.

Remarque : On voit bien que la methode employée dans cet exercice marche dans un grand nombre de cas : on utilise juste le fait qu'il existe une « bonne » fonction pour conclure que toutes les solutions viennent s'écraser sur 0. Il existe un résultat général, appelé théorème de Lyapounov, qui permet de dire sous l'hypothèse d'existence d'une « bonne » fonction L que les solutions partant proche d'un point x_0 tel que $f(x_0) = 0$ viennent s'écraser sur ce point (cf. Laudenbach, *calcul différentiel et intégral* p113).

[1] Ceci donne une nouvelle preuve de $t^+ = +\infty$...

[2] cette inégalité signifie en clair que les solutions dépendent de façon continue des conditions initiales