Université Bordeaux 1 Année 2007-2008
Master 1 de mathématiques

Exercice 1 On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $n.(x,y) = (2^n x, 2^n y)$.

1. Montrer que $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\mathbb{Z}$ est une variété compacte *affine*. Donner un atlas affine à 2 cartes $\{(U_1, \psi_1); (U_2, \psi_2)\}$.
2. Montrer que X est difféomorphe à $S^1 \times S^1$ (on pensera aux coordonnées polaires) et donc à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. N.B. A priori les variétés affines X et $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sont différentes.
3. Sur une variété affine V, on peut définir la notion de *segment de droite paramétré*. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, un segment de droite est une application γ de I dans V qui lue dans l'atlas affine de V est affine. On dira qu'il s'agit d'une droite si elle ne possède pas de prolongement affine.

   On note p la projection de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur X. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$. Montrer que $\gamma : \mathbb{R} \to X$ définie par $\gamma(t) = p(a\,t + b, c\,t + d)$ est une droite de X.

   Est-ce que $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to X$ définie par $\varphi(t) = p(0,t)$ est une droite de X (on pourra regarder la lecture de φ dans les cartes (U_i, ψ_i) lorsque t tend vers 0) ? Comparer aux droites du tore affine $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
4. On considère la droite paramétrée définie par $\gamma(t) = p(1,t)$. Soit $(t_n)_n$ une suite de réels tendant vers $+\infty$ (ou $-\infty$). Que peut-on dire de $(\gamma(t_n))_n$? Comparer aux droites de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
5. Quelle est l'image d'une droite par un automorphisme affine ? Montrer que toute homothétie de centre 0 définit un automorphisme affine de X et que tout élément de $SL(2,\mathbb{Z})$ définit un automorphisme affine de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Exercice 2 On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $n.(x,y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. Montrer que cette action est libre et discontinue mais que la topologie de la variété quotient n'est pas séparée. La situation est-elle la même si on considère la restriction de l'action au demi-plan supérieur ?

Exercice 3 Soit Γ le sous-groupe de $M_4(\mathbb{R})$ engendré par :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que tout élément γ de Γ, il existe $(n,m,p) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\gamma = \alpha^n.T_2^m.T_3^p$.
2. Soit $\gamma \in \Gamma$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on note (X,Y,Z) l'élement de $\mathbb{R}^3$ tel que $\gamma.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que l'on définit ainsi une action de Γ sur $\mathbb{R}^3$ qui preserve la norme euclidienne.
3. Montrer que cette action est libre et discontinue (on pourra chercher à minorer la distance entre les points d'une orbite).
4. Montrer que $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x < 1/4,\ -1/2 < y < 1/2,\ -1/2 < z < 1/2\}$ est un domaine fondamental de l'action de Γ. En déduire une description de $\mathbb{R}^3/\Gamma$.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3/\Gamma$ est une variété séparée (Étant donné $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, on pourra utiliser un domaine fondamental contenant (x',y',z') et un unique point de $\Gamma.(x,y,z)$.)