Université Bordeaux 1 | Année 2007-2008
Master 1 de mathématiques | Géométrie Différentielle

Exercice 1 On considère la sphère $\mathbb{S}^2$ plongée dans $\mathbb{R}^3$ de la façon usuelle. On désigne par i_N la projection stéréographique de pôle N et par h_t l'homothétie de centre 0 et de rapport e^t du plan $\{z = 0\}$.

1. Montrer que $i_n^{-1} \circ h_t \circ i_n$ se prolonge de façon unique en un difféomorphisme g_t de $\mathbb{S}^2$. Montrer que $g_t \circ g_{t'} = g_{t+t'}$.
2. Montrer que les seuls points fixes de g_t sont les pôles N et S. Déterminer $\lim_{t\to\pm\infty} g_t(x)$.
3. Vérifier que le générateur infinitésimal de ce groupe à un paramètre est donné pour tout $x \in \mathbb{S}^2$ par la projection orthogonale du vecteur $(0, 0, 1)$ sur $T_x\mathbb{S}^2$.
4. Recommencer avec $h_t(x) = x + t.v$, avec v un vecteur du plan $\{z = 0\}$.

Exercice 2 Montrer que $(T\mathbb{S}^n)\times\mathbb{R}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}^{n+1}$. En déduire que $\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^1$ est parallélisable. Montrer que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable.

Exercice 3 Soit X est une variété paracompacte de dimension p et $f : X \to \mathbb{R}$ est une application lisse telle que $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ne contient aucune valeur critique de f et que $f^{-1}([a, b])$ est compact. Le but de cet exercice est de montrer que $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$ sont deux sous-variétés difféomorphes.

1. On suppose dorénavant que X est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Est ce une restriction ? Comment cela permet-il de définir un produit scalaire sur chaque espace tangent à X ?
2. Montrer qu'au voisinage de tout $x \in X$, le fibré tangent TX admet p sections locales lisses orthonormées, notées $(s_1^x, \ldots, s_p^x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe un unique vecteur ∇f_x appartenant à T_xX tel que $\forall u \in T_xX, \nabla f(x).u = df(x)(u)$.
4. Montrer en utilisant $(s_1^x, \ldots, s_p^x)$ que le champ de vecteurs ∇f ainsi défini est lisse. Il est appelé le champ de vecteurs gradient[1] de f.
5. Montrer que si $df(x) \neq 0$ alors $T_x\big(f^{-1}(f(x))\big)$ est othogonal à $\nabla f(x)$.
6. Question indépendante : Soit ϕ le flot de ∇f, montrer que si $\nabla f(x) \neq 0$, l'application $t \mapsto f \circ \phi(t, x)$ est strictement croissante. Existe-t-il des courbes périodiques non triviales ? On suppose temporairement X compacte. Montrer que $\lim_{t\mapsto+\infty} f \circ \phi(t, x)$ est bien définie en déduire que si y est un point d'accumulation d'une courbe intégrale alors $\nabla f(y) = 0$ [on regardera les suites $f(\phi(t_n+T, x))$]. Que peut-on dire des courbes intégrales lorsque les points critiques de f sont isolés ?
7. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs sur X, que l'on note v, qui est lisse, nul en dehors d'un compact et tel que $\forall x \in f^{-1}([a, b]), v(x) = \frac{1}{\nabla f(x).\nabla f(x)}\nabla f(x)$. Pourquoi v est-il complet ?
8. Soit ψ le flot de v, montrer que si $f(x)$ et $f(x) + t$ appartiennent à $[a, b]$ alors $f \circ \psi(t, x) = f(x) + t$. Conclure.
9. De quelle fonction le champ de vecteurs de l'exercice 1 est-il le champ gradient.
10. Montrer que chacune des hypothèses : « $f^{-1}([a, b])$ est compact » et « $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ne contient aucune valeur critique de f » est nécessaire.

Exercice 4
1. Montrer en utilisant un champ de vecteurs que quels que soient les réels positifs r et r' avec $r' > r$ et les points x et y dans $B(0, r)$ il existe un difféomorphisme lisse f de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$ et $f(z) = z$ si $\|z\| > r'$.
2. Soit X une variété lisse. Montrer que « $x \sim y$ s'il existe un difféomorphisme f tel que $f(x) = y$ » définit une relation d'équivalence sur X dont les classes d'équivalences sont ouvertes. En déduire que si X est connexe le groupe des difféomorphismes de X agit transitivement sur X.
3. Montrer que si X est connexe (par arcs) et de dimension au moins 2 alors l'ensemble des k-uplets de points deux à deux disjoints est un sous-ensemble connexe (par arcs) de $X \times X \times \cdots \times X$. En déduire que Diff$(X)$ agit transitivement sur cet ensemble.

[1]Il dépend en fait du plongement choisi qui détermine le produit scalaire sur T_xX.