Université Bordeaux 1 Année 2006-2007
Licence 2 MISMI.

Analyse, feuille1
SÉRIES NUMÉRIQUES.

Exercice 1 *Télescopage et autre.*
Établir la convergence et calculer la somme des séries de terme général u_n lorsque

$$u_n = t^n \ ; \quad u_n = nt^{n-1} \ ; \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \ ; \quad u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2}) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{n^2}{n!} \ ,$$

t étant un réel. On utilisera pour la dernière série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n! = e$.

Exercice 2 *Séries positives : comparaison, équivalence*
Étudier la convergence des séries de termes généraux

$$\frac{\ln n}{n}, \quad \frac{1}{n2^n}, \quad \frac{1}{2n-1}, \quad \frac{2n^2-1}{n^2}, \quad \frac{1}{n^2},$$

$$\frac{1}{2^n - n}, \quad \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{n+5}}, \quad \frac{1}{(\ln n)^p} \ (p \in \mathbb{N}),$$

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \quad \sin(\frac{1}{n^3}), \quad \ln(1+\frac{1}{n}), \quad \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an},$$

Exercice 3 *Critères...*
Étudier la convergence des séries de termes généraux

$$e^{-\sqrt{n^2-1}}, \quad \frac{a^n}{n!}, \quad \sqrt{n!}\sin 1 \sin\frac{1}{\sqrt{2}} \dots \sin\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \frac{\sqrt{n!}}{(n+2)!}, \quad \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 4 *Série harmonique et constante d'Euler*

1. Montrer grâce au critère de Cauchy que la série harmonique c'est-à-dire de terme général $1/n$ est divergente (on considérera $S_{2p} - S_p$, où S_p est la somme partielle de la série).
2. Montrer que la serie de terme général $\frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$ est convergente.
3. En déduire que la suite $u_n = S_n - \ln n$ est convergente. On note sa limite γ.
4. Montrer que $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n}$. En déduire que $[\frac{(-1)^n}{n}]$ converge et calculer sa somme.

Exercice 5 *Transmission*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in N}$ deux suites à termes positifs. Étudier la convergence des séries de terme général

$$\ln(1+u_n), \quad \frac{u_n}{1+u_n}, \quad u_n + v_n, \quad \sqrt{u_n v_n}.$$

Exercice 6 *Comparaison série intégrale.*
1. Étudier en fonction de $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln^2 k$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{u_n}$ converge (on minorera u_n grâce à une intégrale).

Exercice 7 *irrationnalité de e.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n!n}$. Montrer que les *suites* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergentes de même limite e. Montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 8 *Formule de Stirling.*
On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par

$$u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$. En déduire l'existence d'un réel $k > 0$ tel que

$$n! \sim k n^n e^{-n}\sqrt{n}, \quad n \to +\infty$$

(on ne demande pas de trouver k, mais on pourrait montrer que $k = \sqrt{2\pi}$).

Exercice 9 *Séries alternées (ou presque).*
Étudier la convergence et la convergence absolue des séries de termes généraux

$$(-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n), \quad \frac{(-1)^n}{\ln n}, \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}, \quad \frac{(-1)^n}{n+2\sin n}, \quad \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n},$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \quad \sin((n+1/n)\pi), \quad \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}), \quad \frac{a^n}{n(n+i)}, \ a \in \mathbb{C}.$$

Exercice 10
Étudier la convergence des séries de termes généraux $a_n = \frac{\sin n}{n}$ et $b_n = \frac{\sin^2 n}{n}$. En déduire que la série de terme général a_n n'est pas absolument convergente.

Exercice 11 *Abel.*
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2}\right) \frac{\sin nx}{n}$ converge.
2. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente. On note (S_n) la suite de ses sommes partielles. Montrer en utilisant le lemme d'Abel que la série de terme général $\frac{S_n}{2^n}$ converge et que sa limite vérifie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{S_n}{2^n}.$$

Exercice 12 *exponentielle.*
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $\exp(z)$ la somme de la série absolument convergente $\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!}$ (avec la convention $0^0 = 1$). Montrer que $\exp(z+z')$ $=\exp(z)\exp(z')$. En utilisant un dévelopement de Taylor-Lagrange montrer que la fonction ainsi définie coincide bien sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle.