Liste d'exercices n^o 2

(Déterminants, inverses de matrices et applications, système de Cramer)

Compléments sur le déterminant

Exercice 1

On considère C_1, C_2, C_3 et C_4 les 4 colonnes d'une matrice réelle d'ordre 4. Sachant que $\det(C_1, C_2, C_3, C_4) = 4$, exprimer en fonction des réels a, b et c les déterminants suivants :
$\det(aC_1+C_2+cC_3, C_2, C_3, C_4)$, $\det(aC_1+C_2+cC_3, C_2, C_4, C_1-bC_3)$ et $\det(C_1, aC_1+C_2-bC_3, C_2+C_4, C_1-cC_3, C_4)$.

Exercice 2

Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $M_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})$ la matrice réelle définie par $\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$. Montrer en utilisant la formule générale d'un déterminant de matrice, que A et B ont même déterminant.

Exercice 3

Calculer les déterminants suivants où les matrices sont de taille $n \times n$

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix}$$

Exercice 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$:

$$det(A + M) = det(A) + det(M).$$

Montrer que $A = 0$.

Calcul des inverses des matrices et applications

Exercice 5

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles dans $\mathbb{R}$. Le cas échéant trouvez les cofacteurs et l'inverse de la matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soit A la matrice $A = (a_{ij})$ où

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Justifier que A est inversible et calculer son inverse. On pourra chercher à résoudre un système.

Exercice 7

Pour quelles valeurs de a et b la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} m \\ m+1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ m+1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2m \\ m-2 \end{pmatrix}$$

où m est un réel quelconque.

1. Pour quelles valeurs de m ces trois vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de la famille (u, v, w).
3. Quand le rang est 2 déterminer une équation cartésienne du plan vectoriel engendré par u, v et w.

Exercice 9

1. Montrer que la matrice suivante est inversible et déterminer son inverse : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. En déduire la résolution du système suivant $\begin{cases} x+z & = & 0 \\ y+z & = & 4 \\ x+y & = & 2 \end{cases}$

Exercice 10

Vérifier que les systèmes suivants sont des systèmes de Cramer et les résoudre par cette méthode :

$$\begin{cases} 2x-y-z & = & 1 \\ x-y+2z & = & 9 \\ x+2y-z & = & 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z & = & a \\ 2x-y+z & = & b \\ x+y+2z & = & c \end{cases}$$

Exercice 11

1. Montrer que si $A^n + A^{n-1} + \cdots + A + I = 0$ la matrice A est inversible et trouver A^{-1}.
2. Trouver les inverses de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

Exercice 12

Soient A et B deux matrices inversibles.

1. Leur somme est-elle inversible ? Si oui,trouver l'inverse. Si non,trouver un exemple de A et B tels que $A+B$ n'est pas inversible.
2. Leur produit est-il inversible ? Si oui, trouver l'inverse. Si non, trouver un exemple de A et B tels que AB n'est pas inversible.
3. Le produit A^2B^3A est-il inversible ? Si oui,trouver l'inverse.