

Analyse, feuille 2 bis

Exercice 1 Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \rho^2\}$, avec $\rho \in \mathbb{R}^*$. Calculer

$$\int_C y \, dx + 2xy \, dy.$$

Exercice 2 Soit C la courbe de \mathbb{R}^2 définie par $0 \leq x \leq 1$, $y = 2x^2$. Calculer

$$\int_C x^2 y \, dx + (x^2 - y^2) \, dy.$$

Exercice 3 Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calculer

$$\int_D y \, dx \, dy.$$

Exercice 4 a- On considère le chemin paramétré :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t - \sin t, 1 - \cos t) \end{aligned}$$

Pourquoi le support de γ est-il inclus dans le demi-plan supérieur ?

Donnez les extrémités de γ et montrez que ce sont les seuls points de la courbe situés sur l'axe $\{y = 0\}$. Dessinez sommairement γ .

b- Calculez l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} (2 - y)dx + (1 - y)dy$.

c- On considère le domaine (borné) D du plan défini par :

$$D = \{(t - \sin t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1 - \cos t\}.$$

Calculez l'aire de D en utilisant la formule de Green-Riemann et **b-**.

Exercice 5 Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$. Calculer, en utilisant le théorème de Green-Riemann,

$$\int_D \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy$$

.

Exercice 6 ** Soit C le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Calculer en utilisant le théorème de Green-Riemann, l'intégrale curviligne

$$\int_C xy^2 \, dy - yx^2 \, dx.$$

On pourra être amené à faire un changement de variables dans le plan.