Analyse 3, feuille 2
INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES.

Exercice 1 1. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln x dx,\ \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}\ ,\ \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx,\ \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{(1-t)\sqrt{t}}dt\,,\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)^\beta}\ ,\ \int_0^1 \frac{t}{\ln t}dt.$$

2. Montrer que pour $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_2^\infty \frac{dt}{t^{\alpha+1}(\ln t)^\beta}$$

converge et que

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t^{\alpha+1}(\ln t)^\beta} \underset{\infty}{\approx} \frac{1}{\alpha x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

Indication : appliquer la règle de L'Hospital.

Exercice 2 1. Appliquer le critère de Cauchy pour montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}dt$$

diverge.

2. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt,\ \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt,\ \int_0^\infty \frac{\sin t}{t+\sin t}dt,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t+\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}dt,\ \int_1^\infty \cos(t^2)dt,\ \int_1^\infty \sqrt{t}\sin(t^2)dt.$$

Exercice 3 Justifier la convergence et calculer les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx,\ \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx,\ \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}dx,\ \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,dx,\ \int_0^\infty x^2e^{-x}dx.$$

Exercice 4 1. Montrer que $\forall x > -1\ \ln(1+x) \leq x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0,n]\ (1-\frac{x}{n})^n \leq e^{-x} \leq (1+\frac{x}{n})^{-n}$.
3. En déduire que
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n}dt.$$
Rappel (intégrales de Wallis) : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, d\theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}du$ existe et vaut I_{2n-2}.
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 5 1. Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a, +\infty[$. Montrer que $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

2. Soit f une fonction positive et décroissante définie sur $[a, +\infty[$ et telle que $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x(f(x) = 0$.

Exercice 6 Soit f une fonction de classe C^2 définie sur $[0, +\infty[$, telle quue

$$\int_0^\infty f^2(t)dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty (f'')^2(t)dt$$

convergent. Montrer que les intégrales

$$\int_0^\infty |f''(t)f(t)|dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty (f')^2(t)dt$$

convergent.

Exercice 7 Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que $\int_a^\infty f(t)dt$ existe. Montrer l'existence de

$$\int_a^\infty \frac{f(t)}{t^\alpha}dt \quad \text{et de} \quad \int_a^\infty e^{-\alpha t} f(t)dt,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+$.