LISTE D'EXERCICES N^o 3

(Matrice d'une application linéaire, valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation)

Matrice d'une application linéaire

Exercice 1 On considère dans $\mathcal{M}_{4,3}$ la matrice K telle que $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3), \mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$. Trouver une application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ telle que $\mathcal{M}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = K$. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{rang}(K)$. L'application u est-elle injective?

Exercice 2 Trouver les matrices des applications suivantes. Lesquelles sont inversibles? Si possible, trouver leurs inverses (par la méthode de votre choix).

1. $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad f(x, y, z) = (x, y, 0);$
2. $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad f(x, y, z) = (\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}});$
3. $F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad f(x, y, z) = (z, x, y).$
4. $L : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 : \quad L(p) = (p(1), p(0), p(-1))$(utiliser la base $(1, X, X^2)$ pour $\mathbb{R}_2$.

Valeur propre - vecteur propre

Exercice 3 Trouver les vecteurs et valeurs propres pour les applications F_1, F_2, F_3 de l'exercice précédent.

Exercice 4 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base naturelle (e_1, e_2, e_3) par

$$f(e_1) = -e_1 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 - e_2, \quad f(e_3) = e_2 - e_3.$$

Cet endomorphisme est-il diagonalisable?

Exercice 5 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f - \lambda I$ soit non injectif, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de f.

Exercice 6 Montrer que, si λ est un valeur propre pour A alors $\lambda + 1$ est un valeur propre pour $A + I$. Qu'est-ce que on peut dire pour $A + A^n$? Si B est n'importe quelle autre matrice, que peut-on dire sur les valeurs propres de $A + B$?

Diagonalisation

Exercice 7 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Trouver les vecteurs propres et valeurs propres de A.
2. Trouver une expression pour A^n.

Exercice 8 Trouver une matrice A, 2×2 ayant 2 et 3 comme valeurs propres et de vecteurs propres associés (1,3) et (6,-1). Quels sont les vecteurs propres et valeurs propres de A^{100} ?

Exercice 9 Trouver les éléments propres (vecteurs propres et valeurs propres) des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables ? Si c'est le cas, déterminer une base de diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 Expliquer sans calcul pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & -1 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Exercice 11 Soit A une matrice vérifiant

$$A^3 = A^2 + 4A - 4I$$

Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ une base de E. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M.

1)
- a) Déterminer le polynôme caractéristique de f.
- b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
- c) Déterminer une matrice P de $Gl_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

2)
- a) Déterminer la matrice de f^5 dans la base $\mathcal{B}$.
- a) Calculer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du vecteur $f^5(v)$ où $v = 2e_1 - e_2$.
- a) Calculer f^m suivant les valeurs de m.

Exercice 13 Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $Gl_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Exercice 14 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. On suppose que $f^2 + I = 0$, et que f n'est pas une homothétie. Montrer que f est diagonalisable de valeurs propres i et $-i$. Puis déterminer le polynôme caractéristique de f.

Exercice 15 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u_1, \cdots, u_n$ des endomorphismes de E. On suppose que les u_i commutent deux à deux (i.e $\forall i, j$ $u_i u_j = u_j u_i$) et sont tous diagonalisables. Montrer qu'il existe une base de E qui diagonalise tous les u_i.