Université Bordeaux 1 Année 2006-2007
Licence 2, MAT 401.

Analyse 3, feuille 3
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS.

Exercice 1 Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on prend $f_n(t) = t^n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on prend $f_n(t) = n^{-t}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on prend $f_n(t) = \dfrac{nt}{1+n^2t^2}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on prend $f_n(t) = \sin(t/n)$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on prend $f_n(t) = \dfrac{2^n t}{1+n2^nt^2}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,\pi]$, on prend $f_n(t) = \dfrac{\sin t}{t(1+nt)}$ si $t \neq 0$ et $f_n(0) = 1$.
7. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$, on prend $f_n(t) = n^\alpha t e^{-nt}$.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,\pi/2]$, on prend $f_n(t) = \cos^n t \sin t$.

Lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme sur tout le domaine de définition préciser les sous-ensembles sur lesquels il y a convergence uniforme.

Exercice 2 Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $f(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = f(nt)$ et $g_n(t) = f(t/n)$. Étudier les convergences simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de ces suites de fonctions. En cas de non convergence uniforme, indiquer comment réduire le domaine $\mathbb{R}_+$ pour avoir convergence uniforme.
2. Montrer que les suites $(f_n/n)_n$ et $(g_n/n)_n$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 Montrer qu'une limite uniforme d'applications bornées est une application bornée.

Exercice 4 Soit une suite de fonctions (f_n) et une fonction f définies sur $[0,1]$, telles que f_n converge vers f simplement sur $[0, 1]$ et uniformément sur $]0,1[$. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 5 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f_n(x) = (1-x)^n \sin(2\pi/x)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n).
2. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,2]$.
3. Pour tout $a \in]0,1[$, montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, 2-a]$.
4. Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[1,2]$.
5. En déduire que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,2]$ pour tout $a \in]0,1[$.

Exercice 6 *Théorèmes de Dini.*

1. Soit (f_n) une *suite croissante* de fonctions réelles continues et définie sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f *continue* sur I, montrer que la convergence est uniforme.

2. Soit (f_n) une suite de *fonctions croissantes* réelles continues et définie sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f *continue* sur I, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 7 Étudier les convergence uniforme des séries de fonctions $\sum f_n$ suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on prend $f_n(t) = \dfrac{1}{n^2 + t^2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on prend $f_n(t) = \sin(t/n^2) - \dfrac{t}{n^2}\cos t$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on prend $f_n(t) = \dfrac{\cos(nt)}{n^2}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on prend $f_n(t) = \dfrac{1}{2^{nx}}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on prend $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n + 1 + |t|}$.

Exercice 8 Soit (g_n) une suite d'applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $\sum g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est polynômiale. En déduire que si (g_n) converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$, g est une application polynômiale[1].

Exercice 9 Soit h un nombre réel strictement positif. Montrer que la série de terme général ne^{-nx} est uniformément convergente sur $[h, +\infty[$. Soit $f(x)$ sa somme, calculer $\int_a^b f(x)dx$, où a et b sont deux nombres réels tels que $h < a < b$.

Exercice 10 Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Arctan}(nx)$. On note $S(x)$ la somme $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 11 Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que ζ est une application définie et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$ ainsi qu'un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 12 Étudier la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série de terme général $f_n(x) = x^{n-1} - 2x^{2n-1}$. En déduire le calcul de la série de terme général $g_n(x) = \frac{1}{n}x^n(1 - x^n)$. Montrer que $\sum g_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 13 On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$, pour $x > -1$ et $n > 0$. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge. On note $f(x)$ sa somme. Montrer, pour $x > -1$, que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$ (indication : écrire $\frac{1}{1+t} = \sum_{t\geq 0}(-1)^n t^n$).

Exercice 14 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{n^\alpha}{n^2+1}\, x.e^{-nx}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour quelle valeur de α la série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?
4. On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que $\sum_{k\geq n+1} u_k(1/n)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En déduire que la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Étudier la continuité de f en 0.

[1]Ce resultat n'est plus vrai sur un intervalle borné. Au contraire le théorème de Weierstrass dit que toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômiales. On pourra voir sur Ulysse le problème de la partie suite de fonctions.