Liste d'exercices n^o 4

(Trigonalisation - polynôme d'endomorphisme - polynôme minimal)

Exercice 1

Soit a un nombre réel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & 1-a & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de A.

2. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Pour ces valeurs de a calculer une matrice $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

4. On suppose $a = 0$. Montrer que les vecteurs $v_3 = (1, 0, 0), v_2 = Av_3, v_1 = Av_2$ forment une base de $\mathbf{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par $f(x) = Ax$ pour $x \in \mathbf{R}^3$ (vecteur colonne). Calculer la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 2

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Expliquer pourquoi le déterminant de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est le produit des valeurs propres complexes de A, valeurs propres comptées avec multiplicité, et la trace de A est la somme des valeurs propres complexes comptées avec multiplicité.

Exercice 4

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ trigonalisable. On suppose que $AB = BA$. Montrer que A et B sont trigonalisables dans une même base.

Application : On suppose de plus que A est nilpotent ($A^n = 0$). Montrer que
$\det(A + B) = \det(B)$.

Exercice 5

Soit A une matrice carrée. On considère les hypothèses

(H_1) $\chi_A(X) = (X-1)^2(2-X)$

(H_2) $\mu_A(X) = (X-1)^2(X-2)$

(H_3) $(A - I)(A - 2I) = 0.$

Sous chacune des hypothèses $(H_i)_{i=1,2,3}$, dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1) A est une matrice carrée d'ordre 3
2) A est diagonalisable
3) 1 et 2 sont valeurs propres de A
4) Les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 2.
5) $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$
6) A est inversible.

Exercice 6

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E.

1) a) On suppose que $f \in GL(E)$. Montrer qu'il existe $P(X) \in K[X]$ tel que $f^{-1} = P(f)$.

1) b) On suppose que $Q(X) \in K[X]$ est tel que $Q(f)$ est inversible. Montrer qu'il existe $R(X) \in K[X]$ tel que $Q(f)^{-1} = R(f)$.

2) On suppose $K = \mathbf{C}$. On note $\mu_f(X)$ le polynôme minimal de f, et soit $Q(X) \in K[X]$. Montrer que $Q(f)$ est inversible si et seulement si $\mu_f(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux (On pourra utiliser le théorème de Bezout).

Exercice 7

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) \neq 0$ et $AB = P(A)$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $AB = BA$ (On pourra écrire $P = P(0) + XQ(X)$).

Exercice 8

Soit $\Phi := M \in M_n(\mathbb{R}) \to M^t$. Calculer les valeurs propres et les sous espaces propres de Φ. Φ est elle diagonalisable ? Quel est le polynôme minimal de Φ ?

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\Phi := v \in \mathcal{L}(E) \to u \circ v$. Montrer que u et Φ ont le même polynôme minimal.

Exercice 10

Soit A la matrice de $M_3(\mathbf{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Quel est le polynôme minimal de A ?

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base canonique de E. Calculer le polynôme caractéristique et le polynome minimal de u. Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2. Pourquoi u est-il non diagonalisable ? Est-il triangonalisable ?