Université Bordeaux 1 Année 2006-2007
Licence 2, MAT 401.

Analyse, feuille 4
Séries entières.

Exercice 1 Calculer le rayon de convergence de chacunes des séries entières suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}, \quad \text{b) } \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{c) } \sum_{n\geq 0} n!\, z^n, \quad \text{d) } \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n} z^{2n}, \quad \text{e) } \sum_{n\geq 0} \frac{2+\cos n}{n} z^{2n}, \quad \text{f) } \sum_{n\geq 0} n! z^{n^2}.$$

Exercice 2 Développer en séries entières (réelles) les fonctions suivantes au voisinage de zéro, préciser les rayons de convergences et donner $f^{(n)}(0)$.

$$\text{a) } f(x) = e^{-x}\sin x, \quad \text{b) } f(x) = \ln(x^2-5x+6), \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x^3-5x^2+8x-4},$$
$$\text{d) } f(x) = (1+x)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}, \quad \text{e) } f(x) = \arcsin x.$$

Exercice 3 Après avoir donné leur rayon de convergence, sommer les séries entières réelles suivantes, étudier la situation aux de l'intervalle de convergence :

$$\sum_{n\geq 0} n^2 x^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{3^n x^n}{2^{n+1}}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1}\ (x>0), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. Montrer que les coefficients de ce développement sont donnés par la suite de Fibonacci $(F_n)_n$. En déduire une expression de cette suite et la limite de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Exercice 5 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{si } x\neq 0,\ f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k tel que :
$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction f n'est pas développable en série entières au voisinage de 0.

Exercice 6 Pour tout $t \in [-1,1]$, on note $f(t) = (\arcsin t)^2$.

1. Montrer que le produit de deux fonctions développables en séries entières sur un intervalle $]-R,R[$ est développable en série entière sur cet intervalle. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

2. Développer f en série entière sur $]-1,1[$ (on montrera que f est solution de l'équation différentielle $(1-t^2)y'' - ty' = 2$).

Exercice 7 1. Déterminer les séries entières dont la somme est solution de l'équation différentielle

$$(1+t^2)y'' - 2y = 0.$$

2. Étudier et sommer les séries entières obtenues (on pourra commencer par sommer les séries dérivées).

Exercice 8 1. Soit $f = P + iQ$ une fonction analytique sur un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est constante, (ii) P est constante, (iii) Q est constante, (iv) $\bar{f}$ est analytique, (v) $|f|$ est constant.
2. Soit f et g deux fonctions analytique sur un ouvert U. On suppose que g ne s'annulle pas sur U et que pour tout $z \in U$, $f(z)\bar{g}(z) \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f = cg$.

Exercice 9 Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue du logarithme de z sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tout entier.
On appelle détermination principale du logarithme l'application Log de $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ dans $\mathbb{C}$ définie par Log $(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$ où $\text{Arg}(z)$ désigne l'argument de z appartenant à $]-\pi, \pi[$.
Montrer que pour tout z dans le disque unité, on a $\text{Log}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. En déduire, grâce au théorème d'Abel, les sommes des séries $[\frac{\cos nt}{n}]_{n\geq 1}$ et $[\frac{\sin nt}{n}]_{n\geq 1}$.

Exercice 10 Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Montrer que s'il existe A, B, R et k tel que si $|z| \geq R$ alors $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k.

Exercice 11 Calculer

$$\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z},$$

où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \cos^n t dt$.