# Liste d'exercices n$^o$ 5

(Lemme des noyaux, endomophismes nilpotents, sous-espaces caractéristiques)

## Lemme des noyaux

**Exercice 1**
Soit $u \in L(E)$ vérifiant $u^3 = Id$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - Id) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$.

**Exercice 2**
Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $u$. On suppose qu'on peut écrire $P = QR$, avec $Q$ et $R$ premiers entre eux.
Montrer que $\mathrm{Im}(Q(u)) = \mathrm{Ker}(R(u))$.

## Endomorphismes nilpotents

**Exercice 3**
Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ?

**Exercice 4**
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

**Exercice 5**
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A$ est nilpotente et que $B$ commute avec $A$. Que peut-on dire de $tr(AB)$ ?

**Exercice 6**
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^3 = A^2$. Montrer que $A^2$ est diagonalisable et que $A^2 - A$ est nilpotente.
2. On suppose que $A^{k+1} = A^k$, avec $k > 0$ un entier. Etablir l'existence d'un entier $p > 0$ tel que $A^p$ est diagonalisable et que $A^p - A$ est nilpotente.

## Sous-espaces caractéristiques

**Exercice 7**
Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs propres de $B$ ? Quelles sont les dimensions de leurs sous espaces propres et de leurs sous-espaces caractéristiques associés ? Donner une base de ces sous-espaces. $B$ est-elle diagonalisable ?

**Exercice 8**
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_u$ de $u$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques $F_i$.
2. Donner une base suivant laquelle la matrice de $u$ se décompose en deux blocs diagonaux.
3. Donner les projections $p_i$ de $\mathbb{R}^4$ sur $F_i$.

**Exercice 9**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda id)) = 2$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

**Exercice 10**
Soit $A$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver les valeurs propres, sous-espaces propres et sous-espaces caractéristiques de $A$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à $A$ est triangulaire. En déduire la décomposition de Dunford de $A$. Quel est le polynôme minimal de $A$ ?

**Exercice 11**
Soit $f$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f^2 \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
2. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f^2$ est stable par $g$. En déduire qu'un tel endomorphisme $g$ ne peut exister.