Université Bordeaux 1 Année 2005-2006
Licence 2, MAT 401.

Analyse, feuille 4
SÉRIES DE FOURIER.

Exercice 1 On note f l'application 2π périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ de la façon suivante :

$$\text{si } t \in]0,\pi[,\ f(t)=1, \text{ si } t \in]-\pi,0[, f(t)=-1 \text{ et } f(0)=f(\pi)=0$$

Développer f en série de Fourier. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 2 On note f l'application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, $f(x)=x^2-\pi^2$.
Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire les valeurs des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$

(On utilisera le théorème de Dirichlet et la formule de Parseval).

Exercice 3 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique et de classe C^1, telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt \leq \int_0^{2\pi}|f'(t)|^2dt$$

et caractériser l'égalité.

Exercice 4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. On désigne par f_α l'application de D telle que

$$\forall t \in [-\pi,\pi],\quad f_\alpha(t)=\cos(\alpha t).$$

Calculer la série de Fourier de f_α. En déduire

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\pi Z,\quad \mathrm{cotan}\, t = \frac{1}{t}+2t\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{t^2-n^2\pi^2}.$$

Exercice 5 Développer en série de Fourier la fonction f définie par $f(x)=e^{\cos(x)}\cos(\sin x)$. (On écrira tout d'abord f comme la somme d'une série trigonométrique et on vérifiera que cette série est la série de Fourier.)

Exercice 6 Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une application 2π-périodique et $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $M\geq 0$ tel que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(x)|\leq M|x-y|^\alpha.$$

1. Soient $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$. Calculer $\int_0^{2\pi} f(t+a)e^{-int}dt$ en fonction du coefficient de Fourier complexe $c_n[f]$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, $|c_n(f)|\leq \dfrac{M}{2}\left|\dfrac{\pi}{n}\right|^\alpha$.