Champs de vecteurs

Dans toute cette partie v désignera un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Nous noterons $\varphi_t^v(x)$ le flot de v évalué en (t,x), c'est-à-dire la solution au temps t du système $y' = v(y),\ y(0) = x$. Nous admettons que pour $x \in U$, il existe un ouvert $U' \subset U$ contenant x et un intervalle ouvert I contenant 0 tels que φ^v soit de classe C^∞ sur $I \times U'$.

Rappelons qu'un difféomorphisme $\Phi : U \to V$ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ établit une bijection entre les champs de vecteurs sur U et les champs de vecteurs sur V : au champ de vecteurs v sur U on associe le champ $\Phi_* v$ sur V défini par $(\Phi_* v)(y) = \mathrm{D}\Phi(x)(v_x)$ où $y = \Phi(x)$.

Exercice 1. *Interprétation de la divergence.*
Soit v un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. On appelle *divergence* de v la fonction

$$\mathrm{div}(v)(x) = \mathrm{tr}(\mathrm{D}v(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x).$$

(1) Pour un champ linéaire $v(x) = Ax$ avec $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}^n)$,
  (a) calculer $\mathrm{div}(v)(x)$ et $\varphi_t^v(x)$;
  (b) calculer $m(\varphi_t^v(X))$ où X est un compact de $\mathbb{R}^n$ et m la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ (indication : utiliser le fait que si L est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ alors $m(L(X)) = |\det(L)| \cdot m(X)$).
  (c) Dessiner $\varphi_t^v(X)$ pour $n = 2$, $X = [1,2] \times [1,2]$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) On ne suppose plus v linéaire. Montrer que $\mathrm{div}(v)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \det(D\varphi_t^v(x))$. Interpréter.

Exercice 2. Soient $\Phi : U \to V$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et v un champ de vecteurs sur U.

(1) Soit w l'image de v par Φ. Montrer que le difféomorphisme Φ transforme les courbes intégrales de v en les courbes intégrales de w, autrement dit : $\Phi(\varphi_t^v(x)) = \varphi_t^w(\Phi(x))$ pour tout $x \in U$ et tout $t \in \mathbb{R}$ suffisamment proche de 0.
(2) Réciproquement, soit w un champ de vecteurs sur V vérifiant la propriété ci-dessus, montrer que le champ w est l'image du champ v par le difféomorphisme Φ.
(3) Soit v le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ défini par $v(x,y) = (-y - x(x^2+y^2), x - y(x^2+y^2))$. En utilisant les coordonnées polaire, déterminer le flot de v restreint a un demi-plan.
(4) Soit P un difféomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{A}$ le champ de vecteurs linéaire de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A. Déterminer $P_*\bar{A}$. Calculer $\frac{d}{dt}_{|t=0}((\exp(tB)_*\bar{A})_x)$.

Exercice 3. Soit v un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^n$ et M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $x \in M, v(x) \in T_xM$.

(1) Montrer que si $x \in M$ et si $\varphi_t^v(x)$ (le flot de v évalué en (t,x)) existe alors $\varphi_t^v(x) \in M$.
(2) En utilisant le théorème des bouts du premier semestre, montrer que si M est compacte et si $x \in M$ alors $\varphi_t^v(x)$ est défini pour tout $\mathbb{R}$.
(3) Soit $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. Soit $v_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_2, x_1, 0, 0)$ et $v_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0,-x_4,x_3)$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^4$. Quels sont leurs flots ? Montrer de deux façons que si $x \in M$ alors $\varphi_t^{v_i}(x) \in M$. Soit $a \in \mathbb{R}$, et $v = v_1 + av_2$. Soit $x \in M$, quels liens il y a t-il entre les courbes intégrales de v et l'exercice 5 de la feuille 2 ?

Formes différentielles

Exercice 4. *Formes alternées décomposables et indécomposables.*
Une forme p-linéaire alternée $\omega \in \bigwedge^p E^*$ sera dite *décomposable* si elle peut s'écrire comme le produit extérieur de p formes linéaires, *indécomposable* sinon.

(1) Montrez que toute forme $\omega \in \bigwedge^n E^*$ est décomposable.
(2) Soit $\omega \in \bigwedge^{n-1} E^*$. Notons φ l'application qui à $\theta \in E^*$ associe $\theta \wedge \omega \in \bigwedge^n E^*$. En considérant une base du noyau de φ montrez que ω est décomposable.
(3) Soit $\theta \in E^*$. Montrez qu'une p-forme α peut s'écrire sous la forme

$$\alpha = \theta \wedge \theta'$$

si, et seulement si, $\theta \wedge \alpha = 0$ (on dit alors que α est *divisible par* θ).

(4) Montrez que si α, β, γ, δ sont des formes linéaires indépendantes, la 2-forme
$$\omega = \alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \delta$$
est indécomposable.

Exercice 5. *Forme angulaire.*
Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et soit $\omega \in \Omega^1(U)$ la forme donnée par
$$\omega = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}.$$

(1) Montrez que ω est fermée.

(2) Soit $c : [a, b] \to U$ une courbe paramétrée (de classe C^1) telle que $c(a) = c(b)$. Montrez que pour toute fonction $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ on a $\int_c \mathrm{d}(f) = 0$.

(3) Conclure que ω n'est pas exacte.

Exercice 6. On considère la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :
$$\omega(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})\mathrm{d}x + \ln(\sqrt{x^2 + y^2})\mathrm{d}y.$$

(1) Montrer que ω est exacte.

(2) Déterminer f telle que : $\omega = \mathrm{d}f$.

Exercice 7. *Gradient, rotationnel et divergence.*
Pour un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$, $C = X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + Z\frac{\partial}{\partial z}$, on définit respectivement la *divergence* de C (qui est une fonction) et le *rotationnel* de C (qui est un champ de vecteurs) par :

– $\mathrm{div}(C) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$,
– $\mathrm{rot}(C) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}$.

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lisse on définit son champ *gradient* par :
$$\mathrm{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}.$$
Enfin, on introduit deux formes associées à C :

– $\omega_C^1 = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$,
– $\omega_C^2 = X\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + Z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

(1) Montrer que $\mathrm{d}f = \omega^1_{\mathrm{grad}(f)}$, $\mathrm{d}(\omega_C^1) = \omega^2_{\mathrm{rot}(C)}$ et $\mathrm{d}(\omega_C^2) = \mathrm{div}(C)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$.

(2) En déduire que $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ et $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(C)) = 0$.

(3) Si C est un champ de vecteurs tel que $\mathrm{rot}(C) = 0$, montrez qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lisse telle que $C = \mathrm{grad}(f)$.
De même, si C est un champ de vecteurs tel que $\mathrm{div}(C) = 0$, montrez qu'il existe un champ de vecteurs D sur $\mathbb{R}^3$ tel que $C = \mathrm{rot}(D)$.

Exercice 8. *Examen Mai 2005.*

(1) On considère sur $\mathbb{R}^3$ la 1-forme différentielle $\omega = (12x^3z + 2xy^3)\mathrm{d}x + 3x^2y^2\mathrm{d}y + 3x^4\mathrm{d}z$.
  (a) Montrer que la forme ω est fermée.
  (b) Trouver explicitement toutes les fonctions différentiables f sur $\mathbb{R}^3$ telles que $\omega = \mathrm{d}f$.

(2) Soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles de degrés quelconques définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et qui sont fermées.
  (a) Montrer que la forme différentielle $\omega_1 \wedge \omega_2$ est fermée.
  (b) On suppose de plus ω_1 exacte sur U. Montrer que la forme $\omega_1 \wedge \omega_2$ est exacte sur U.

(3) Soit $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.
  (a) Rappeler la définition de la 1-forme différentielle $g^*(\frac{\mathrm{d}t}{t})$ où t est la coordonnée usuelle sur $\mathbb{R}$.
  (b) Soit la 2-forme différentielle $\sigma = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$. Vérifier que l'on a l'égalité $g^*(\frac{\mathrm{d}t}{t}) \wedge \sigma = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.