Gradient et Dérivée

Gradient. Lorsque nous considérons une application différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il est pratique de manipuler son gradient plutôt que sa différentielle. Le *gradient* de f en x, noté $\nabla f(x)$, est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\langle \nabla f(x), h\rangle = \mathrm{D}f(x)(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

où $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Ce vecteur est bien défini (il existe et est unique) car l'application

$$L : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ u & \longmapsto & (v \mapsto \langle u, v\rangle) \end{array}$$

établit un isomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et son dual $(\mathbb{R}^n)^*$. De l'écriture $\mathrm{D}f(x)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot h_i$ nous déduisons que dans la base canonique :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

La donnée du gradient en tout point de U (c'est-à-dire du champ gradient) équivaut à celle de la différentielle. Remarquons que l'application f est une submersion sur l'ouvert U *ssi* son gradient est non nul en tout point de U.

Dérivée. De même, lorsque nous considérons une application différentiable $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, nous préférons travailler avec sa dérivée plutôt qu'avec sa différentielle. La *dérivée* de f notée f', est l'application

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & f'(t) = \mathrm{D}f(t)(1) \end{array}.$$

Comme par définition de la différentielle

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \mathrm{D}f(t)(1) + o(1) \quad \text{pour } h \text{ voisin de } 0,$$

cette notion de dérivée coïncide clairement avec celle définie en premier cycle dans les cours d'analyse en une variable réelle. La donnée de la dérivée équivaut à celle de la différentielle. Enfin, remarquons que l'application f est une immersion sur l'intervalle ouvert I *ssi* se dérivée ne s'annule pas sur I, c'est-à-dire si en tout $t \in I$ l'une des dérivées $f_i'(t)$ est non nulle.

Formes quadratiques réelles

Définitions. Soit E un k-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Rappelons brièvement qu'une *forme quadratique* sur E est une application de la forme

$$Q : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & k \\ x & \longmapsto & Q(x) = B(x,x) \end{array},$$

où B est une forme bilinéaire symétrique sur E appellée *forme polaire* de Q. A toute forme quadratique est associée une unique forme bilinéaire symétrique et réciproquement.

Etant fixée une base $(e_i)_{i=1\ldots n}$ de E, nous associons à toute forme bilinéaire B une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = B(e_i, e_j)$. Evidemment, la matrice est symétrique *ssi* la forme bilinéaire l'est, ainsi à toute forme quadratique Q on associe une unique matrice symétrique. Soient $x, y \in E$, et $X, Y \in k^n$ leurs vecteurs coordonnées dans la base $(e_i)_i$, alors

$$\begin{array}{rcccl} B(x,y) & = & {}^tXAY & = & \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j \\ Q(x) & = & {}^tXAX & = & \sum_{i=1}^n a_{ij}x_ix_j \end{array}$$

Précisons quelques définitions : soient Q une forme quadratique et B sa forme polaire

- le *noyau* de Q (et de B) est l'ensemble des vecteurs x tels que $B(x,y) = 0$ pour tout y.
- le *rang* r de Q est le rang de la matrice symétrique associée.
- le *cône isotrope* de Q est l'ensemble $Q^{-1}(\{0\})$.
- Q est dite *non dégénérée* lorsque son noyau est trivial réduit à $\{0\}$, et *dégénérée* dans le cas contraire. Autrement dit Q est non dégénérée lorsque son rang est $r = n$.

Le noyau de Q est inclus dans le cône isotrope, la réciproque est fausse. La définition du rang est mal posée, il est préférable de considérer l'application linéaire de E dans son dual E^* qui à x associe $B(x, \cdot)$.

Formes quadratiques réelles. Nous nous intéressons à la classification des formes quadratiques sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Nous définissons la relation d'équivalence

$$Q_1 \sim Q_2 \Leftrightarrow \text{il existe un automorphisme } \varphi \in Aut(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } Q_1 = Q_2 \circ \varphi.$$

Le but est de caractériser les classes d'équivalences de formes quadratiques. Une formulation un peu plus fine serait de dire que nous regardons les orbites de formes quadratiques sous l'action à droite du groupe des automorphismes linéaires. D'un point de vue matriciel cela revient à regarder l'action à droite suivante de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur l'espace des matrices symétriques :

$$A \cdot P =^t PAP \quad A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),$$

et classer les orbites de matrices sous cette action est un problème équivalent au problème initial. La solution à ce problème est donnée par la *loi d'inertie de Sylvester* :

Théorème. *Soit Q une forme quadratique de rang r sur $\mathbb{R}^n$; Q est équivalente à une forme du type :*

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2.$$

L'entier p ne dépend que de Q, le couple $(p, r-p)$ appelé signature *de Q caractérise la classe d'équivalence de Q.*

Les cônes isotropes dans $\mathbb{R}^n$ sont-ils des sous-variétés ?

Dans la suite nous considérons une forme quadratique non dégénérée Q de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, nous nommerons B sa forme polaire et A la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Nous noterons X le vecteur coordonnées d'un point x.

Quadriques. L'application Q est clairement C^∞ et sa différentielle en x est donnée par

$$\mathrm{D}Q(x)(h) = 2B(x,h) = 2\ {}^tXAH = \langle 2AX, H \rangle,$$

en particulier nous avons $\nabla f(x) = 2AX$ dans la base canonique. Comme Q est non dégénérée la différentielle de Q est non nulle en dehors de 0, on pourrait aussi dire que la matrice A est inversible et le gradient $\nabla f(x)$ est non nul dès que x est non nul. En conséquence Q est une submersion sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ une valeur atteinte par Q, la quadrique affine $Q^{-1}(\{a\})$ est la fibre d'une submersion puisque $0 \notin Q^{-1}(\{a\})$, c'est ainsi une sous-variété de $\mathbb{R}^n$; sa dimension est $n-1$, son espace vectoriel tangent au point x est le noyau

$$T_xQ^{-1}(\{a\}) = Ker(\mathrm{D}Q(x)) = \{u \in \mathbb{R}^n \ ; \ \langle AX, U \rangle = 0\} = (AX)^\perp$$

c'est aussi l'hyperplan orthogonal (pour le produit scalaire canonique) à AX.

Cône. Soit $C = Q^{-1}(\{0\})$ le cône isotrope de Q. Nous supposerons Q non définie-positive et non définie-négative, c'est-à-dire de signature différente de $(n,0)$ et $(0,n)$, cela permet d'éviter le cas $C = \{0\}$, où C est une sous-variété de dimension 0 de $\mathbb{R}^n$.

Comme Q est une submersion sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ le cône privé de l'origine est une sous-variété en tant que fibre d'une submersion définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Le problème est de montrer que le cône tout entier ne constitut pas une sous-variété. Voici trois arguments différents pour le prouver :

Argument topologique. Etudions d'abord la topologie de C. Quitte à faire agir un isomorphisme linéaire, en particulier un difféomorphisme, nous pouvons supposer

$$Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 = Q_+(x_1, \ldots, x_p) - Q_-(x_{p+1}, \ldots, x_n).$$

Le cône C s'identifie à

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \ ; \ Q_+(x) = Q_-(y)\} \\ &= \{r \cdot (x,y) \ ; \ r \in \mathbb{R}_+ \text{ et } Q_+(x) = Q_-(y) = 1\} \\ &= \{r \cdot (x,y) \ ; \ r \in \mathbb{R}_+ \text{ et } (x,y) \in \mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{S}^{n-p-1}\} \end{aligned}$$

Finalement $C = \mathbb{R}_+ \cdot (\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{S}^{n-p-1})$, donc C est un cône de base un produit de sphères. Le cône privée de l'origine est le cylindre : $C \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^* \cdot (\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{S}^{n-p-1})$. Lorsque $p = 1$ ou $n - p - 1 = 1$, une des deux sphères est $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$, et comme $\mathbb{S}^0$ n'est pas connexe le cylindre $C \setminus \{0\}$ ne l'est pas non plus.

Supposons momentanément Q de signature $(n-1, 1)$ ou $(1, n-1)$. Si C était une sous-variété, ce serait une sous-variété de dimension $n-1$ au voisinage de 0 (C est connexe et $C \setminus \{0\}$ de dimension $n-1$), il existerait alors un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et φ un difféomorphisme de U dans un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(U \cap C) = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap V$. En particulier $U \cap C$ serait homéomorphe à $(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap V$ c'est-à-dire à un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, et $(U \cap C) \setminus \{0\}$ serait homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ privé d'un point. Mais pour $n \geq 3$, un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ privé d'un point reste connexe alors que $(U \cap C) \setminus \{0\}$ ne l'est plus, il ne peut donc y avoir d'homéomorphisme entre $U \cap C$ et un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$. Par conséquent, si $n \geq 3$ et Q de signature $(1, n-1)$ ou $(n-1, 1)$, le cône C n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Un argument topologique basé sur la connexité reste valable pour $n = 2$. Par contre, pour $n \geq 3$ si la signature n'est plus $(n-1, 1)$ ou $(1, n-1)$ l'argument de connexité ne fonctionne plus car $C \setminus \{0\}$ est connexe (les sphères $\mathbb{S}^p$ avec $p \geq 1$ sont connexes).

Argument géométrique. Supposons que C est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$, dans ce cas l'ensemble des vecteurs tangents à C en 0 forme un espace vectoriel noté T_0C ; nous allons montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à C en 0 est exactement C, il s'agira ensuite de remarquer que C n'est pas un espace vectoriel pour conclure par contradiction.

Soit $u \in C$, considérons $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to C$ définie par $\alpha(t) = t \cdot u$, nous avons $\alpha'(0) = u$. De ce fait tout élément de C est vecteur tangent à C en 0.

Soit u un vecteur tangent à C en 0, il existe $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to C$ de classe C^1 telle que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha'(0) = u$. Soit $(t_k)_k$ une suite d'éléments de $]-\epsilon, \epsilon[$ convergeant vers 0, la suite des vecteurs $u_k = \alpha(t_k)/t_k$ converge trivialement vers $\alpha'(0) = u$. Comme $u_k \in C$ pour tout k, et comme C est fermé il vient que $u \in C$. Donc C est exactement l'ensemble des vecteurs tangents à C en 0.

Il est facile de voir que C n'est pas un espace vectoriel, il suffit d'exhiber deux vecteurs de C, par exemple $(1, 0, 0, \ldots, 1)$ et $(0, 1, 0, \ldots, 1)$, dont la somme n'est pas dans C.

Autres arguments pour ne pas être une sous-variété

Voici deux autres méthodes pour montrer qu'un certain ensemble n'est pas une sous-variété. Nous appliquerons ces méthodes au cas du graphe $G = \{(x, |x|) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$ de l'application valeur absolue. Nous effectuerons un petit préliminaire sur les vecteurs de directions limites déjà vus lors de l'ex. 4 de la feuille 1.

Vecteurs de direction limite. Soit X une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$, par commodité nous supposerons $0 \in X$. Un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est dit *vecteur de direction limite en* 0 lorsqu'il existe une suite $(M_k)_k$ de points de X, et une suite $(h_k)_k$ de réels telles que :

$$\lim_{k \to +\infty} M_k = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} h_k \overrightarrow{OM_k} = \vec{v}.$$

Nous allons montrer que *l'ensemble des vecteurs de direction limite en O coïncide avec l'ensemble des vecteurs tangents en* 0. Soit $\vec{u}$ un vecteur tangent à X en 0, les suite définies par $M_k = \alpha(t_k)$ et $h_k = 1/t_k$, où t_k est une suite convergeant vers 0, assurent que u est bien un vecteur de direction limite (on reprend les notations vues plus haut). Soit $\vec{v}$ un vecteur de direction limite, la variété X est sur un voisinage ouvert U de 0 la fibre d'une submersion $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$, l'égalité des accroissements finis donne $(f(M_k) = f(0))$:

$$\mathrm{D}f(0)(h_k \overrightarrow{OM_k}) = h_k[f(M_k) - f(0) - o(||OM_k||)] = h_k ||\overrightarrow{OM_k}|| \; o(1),$$

en passant à la limite nous obtenons $\mathrm{D}f(0)(\vec{v}) = 0$, donc $\vec{v}$ appartient au noyau de la différentielle en 0 donc à T_0X, c'est un vecteur tangent.

Argument de dimension. Les vecteurs de coordonnées $(-1,1)$ et $(1,1)$ sont des vecteurs de direction limite de G en 0. En effet, considérons les suites définies par $M_k = (-1/k, 1/k)$ et $h_k = k$, on a $M_k \in G$ et

$$\lim_{k\to+\infty} M_k = O \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} h_k\, \overrightarrow{OM_k} = (-1,1),$$

donc $(-1,1)$ est bien vecteur de direction limite de G en 0, de même avec le vecteur $(1,1)$.

Le graphe privée de l'origine $G \setminus \{0\}$ est une sous-variété (de dimension 1) en tant que graphe d'une fonction lisse sur $\mathbb{R}^*$. Si G était une sous-variété, sa dimension serait 1, et par conséquent la dimension de l'espace vectoriel T_0G serait elle aussi égale à 1. De plus, les vecteurs de direction limite $(-1,1)$ et $(1,1)$ appartiendrait à T_0G, mais ces vecteurs engendrent un espace de dimension 2, contradiction. Donc G n'est pas au voisinage de 0 une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Non-existence d'une immersion. Si G était une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, alors il existerait un voisinage U de 0 et une immersion $g :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G \cap U \subset \mathbb{R}^2$ telle que $g(0) = 0$ et g réalise un homéomorphisme entre $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $G \cap U$. Posons $g = (g_1, g_2)$, comme $(0,0)$ est le point de G réalisant le minimum global de la deuxième coordonnée, nous aurions $g_2'(0) = 0$. Par ailleurs, comme $g(t) \in G$ pour tout t, nous pouvons supposer $g_1 = g_2$ ou $g_1 = -g_2$ pour $t \leq 0$ suffisament proche de 0, on en déduit $g_1'(0) = \pm g_2'(0) = 0$. Ainsi, nous aurions $g'(0) = (0,0)$ ce qui contredit le fait que g est une immersion. Donc G ne peut pas être une sous-variété.