Licence de Mathématiques, parcours mathématiques fondamentales
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Géométrie Différentielle (4TMF602U) **14/05/2020** **durée : 8h00**

Épreuve de M. Mounoud

Mode d'emploi :

Vous avez reçu un code d'épreuve composé de 4 symboles. Chacun de ces symboles correspond à une variante de l'un des 5 exercices ci-dessous. Votre sujet d'examen est constitué des 5 exercices.
Exemple. Si votre code est **c E 2** #, vous devez faire
l'exercice 1 avec $h(x, y, z) = 1 - 2x + x^2 + 2xy - 2y + z^2$ car votre code contient **c**,
l'exercice 2 identique pour tout le monde,
l'exercice 3 avec $f(s, t) = \gamma(s) + t\tau(s)$ car votre code contient **E**,
l'exercice 4 avec $\alpha = \frac{xy^2\,dy - y^3\,dx}{(x^2+y^2)^2}$ car votre code contient **2** et
l'exercice 5 avec $f(u, v) = (\sqrt{1 - v^2}\cos u, \sqrt{1 - v^2}\sin u, v)$.

Vous devez respecter ce code, toute erreur entrainera un 0 à la question (mais inutile de rendre plus qu'une version de chaque exercice).

Pour faciliter la correction indiquez très clairement en début d'exercice le code correspondant et commencez chaque exercice sur une nouvelle page. Numérotez vos pages. Les exercices sont indépendants et peuvent être fait dans l'ordre de votre choix.

Du fait des circonstances exceptionnelles, un soin particulier devra être porté à la rédaction (ni trop longue, ni trop courte et surtout claire), la qualité de celle-ci sera prise en compte dans la notation.
Scannez votre copie (si vous utilisez un téléphone faites attention à ce que le plan de votre appareil soit bien parallèle à celui de la feuille). Veillez à envoyer un fichier (de préférence pdf et de taille raisonnable) réellement lisible, les copies illisibles seront pénalisées.

Bien-sûr, il vous est interdit de communiquer entre vous et de vous faire aider.

— Sous-variétés —

Exercice 1

Soit $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, h(x,y,z) = 0\}$ où $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + 4xy + yz - y & \text{si code } \mathbf{a} \\ 1 + x^2 + yz - y - z & \text{si code } \mathbf{b} \\ 1 - 2x + x^2 + 2xy - 2y + z^2 & \text{si code } \mathbf{c} \\ 2xy - 2x + 2yz - 2z + z^2 & \text{si code } \mathbf{d} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un point $A \in \mathbb{R}^3$ tel que la restriction de h à $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{A\}$ est une submersion lisse. Que peut on dire de $X \smallsetminus \{A\}$?

2. Donner trois droites passant par A et contenues dans X.

3. En déduire que X n'est pas une surface lisse (ie une sous-variété lisse de dimension 2).

Exercice 2

Soit $\mathbf{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^4 + y^4 + z^4 = 1 \textbf{ et } x + y + z = 0\}$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y,z) = z$.

1. Montrer que $\mathbf{V}$ est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

2. Montrer que $g_{|\mathbf{V}}$, la restriction de g à $\mathbf{V}$, possède un minimum et un maximum. Les déterminer en utilisant le théorème des extrema liés.

— Étude métrique des surfaces —

Exercice 3

Soit (I, γ) un arc lisse *birégulier* de $\mathbb{R}^3$ *paramétré par longueur d'arc*. On note $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ le repère de Frenet de cet arc au point $\gamma(s)$ et $K(s)$ et $T(s)$ la courbure et la torsion en ce point. Soit f l'application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(s,t) = \begin{cases} \gamma(s) + t\,\tau(s), & J = \mathbb{R}_+^* \quad \text{si code } \mathbf{E} \\ \gamma(s) + t\,\nu(s), & J = \mathbb{R}_-^* \quad \text{si code } \mathbf{F} \\ \gamma(s) + t\,\beta(s), & J = \mathbb{R} \quad \text{si code } \mathbf{G} \end{cases}.$$

1. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial s}(s,t)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(s,t)$ dans la base $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$. En déduire que f est une immersion lisse. On désigne par Σ la nappe définie par $(I \times J, f)$.

2. Donner f lorsque $I = \mathbb{R}$ et $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$. Décrire le support de la nappe.

On suppose à nouveau que γ est un arc lisse, birégulier, paramétré par longueur d'arc quelconque.

3. Donner l'expression de la première forme fondamentale dans les coordonnées $(I \times J, f)$.

4. Déterminer l'application de Gauss associée aux coordonnées $(I \times J, f)$. Pour éviter les confusions, on la désignera par λ (au lieu de ν_Σ). *[la question est un peu plus compliquée dans le cas* **F***, il en sera tenu compte]*

5. On note $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ l'expression de la seconde forme fondamentale de Σ dans les coordonnées $(I \times J, f)$. Calculer B et C *(on pourra exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$ dans la base $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$)*.

6. Calculer la courbure de Σ. À quelle condition celle-ci est-elle nulle ? À quelle condition le support de Σ est-il contenu dans un plan ?

— Formes différentielles —

Exercice 4
Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Soit $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ donnée par

$$\alpha_{(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{x^3\,dy - x^2 y\,dx}{(x^2+y^2)^2} & \text{si code } \mathbf{1} \\ \dfrac{xy^2\,dy - y^3\,dx}{(x^2+y^2)^2} & \text{si code } \mathbf{2} \\ \dfrac{x^2\,dy - xy\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si code } \mathbf{3} \\ \dfrac{xy\,dy - y^2\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si code } \mathbf{4} \end{cases}$$

1. Montrer que α est fermée.

2. Calculer

$$\int_\gamma \alpha.$$

3. La forme α est-elle exacte ?

Exercice 5
Soit $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ définie par $\omega = (x^2 + y^2 + z^2)\,dy \wedge dz$ et $f : U \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+u^2+v^2}(1-u^2-v^2, 2u, 2v), & U = \mathbb{R}^2 & \text{si code } \$ \\ (\sqrt{1-v^2}\cos u, \sqrt{1-v^2}\sin u, v), & U = \mathbb{R}\times\,]-1,1[& \text{si code } \# \\ (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}), & U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 < 1\} & \text{si code } \% \end{cases}$$

1. Calculer $d\omega$.

2. Déterminer $f^*\omega$. Cette forme est-elle fermée ?