Exercice 1. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 d'image Γ. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est dit *vecteur de direction limite* en $A \in \Gamma$ s'il existe une suite de points $(M_k)_k$ de Γ et une suite de réels $(\lambda_k)_k$ telles que

$$\lim_{k\to\infty} M_k = A \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k \overrightarrow{AM_k} = v.$$

Si tout les vecteurs de direction limite en A sont colinéaires, on appelle tangente à Γ en A la droite passant par A et portée par ces vecteurs.

On suppose que γ est un homéomorphisme sur son image. Soit $A = \gamma(t)$ un point de Γ tel que $\gamma'(t) \neq 0$ (on dit que A est un point régulier) et v un vecteur de direction limite en A. Montrer que v est colinéaire à $\gamma'(t)$ (que peut-on dire si $\gamma'(t) = 0$ et $\gamma''(t) \neq 0$?). Que peut on déduire ?
Soit f un difféomorphisme de R^n. Quelle est la tangente à $f(\Gamma)$ en $f(A)$? À quelle condition f preserve-t-elle les angles (entre courbes régulières) ? Montrer que l'application de $R^2 \setminus \{0\}$ dans lui-même définie par $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x, y)$ préserve les angles.
L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme euclidienne, montrer que parmis toutes les droites D de $\mathbb{R}^n$ passant par A, la tangente à Γ est la plus proche de la courbe : on étudiera la distance à D du point $M = \gamma(t + h)$ lorsque h tend vers 0.

Exercice 2. Montrer que l'application $f : (x, y) \mapsto (x, y - x^2)$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0. Dessiner la courbe $t \mapsto (t^2, t^4 + t^5)$ et sa transformée par f ; que remarque-t-on ?

Exercice 3. Soient Γ la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation (E) : $4x^2 - 12xy + 10y^2 = 1$ et f un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. À quelle condition un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient-il à $f(\Gamma)$?
Donner l'équation de $f(\Gamma)$ lorsque $f(x, y) = (2x - 3y, y)$. En déduire un paramétrage de Γ et l'équation de la tangente à Γ en $(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2)$.
Au voisinage de quels points l'équation (E) définit-elle y (resp. x) comme implicite de x (resp. y) ? En déduire, à nouveau, l'équation de la tangente à Γ en $(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2)$.

Exercice 4. Déterminer pour chacune des applications suivantes le rang de la jacobienne en chaque point.

(1) f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

(2) $\begin{array}{llcl} f : & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_1^2 + \ldots + x_n^2 \end{array}$.

(3) $\begin{array}{llcl} f : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, \ldots, x_4) & \mapsto & (x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2) \end{array}$.

(4) $\begin{array}{llcl} f : & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array}$.

(5) $\begin{array}{llcl} f_\alpha : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ & t & \mapsto & ((2 + \cos t)\cos \alpha t, (2 + \cos t)\sin \alpha t, \sin t) \end{array}$.

Exercice 5. *Redressement d'une submersion*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application lisse. On suppose qu'il existe un point a tel que $\mathrm{D}f(a)$ est surjective. On pose $X_i = f_i$, la i-ième application coordonnée de f pour $i = 1, \ldots, p$.

(1) Montrer qu'il existe un voisinage de a sur lequel $\mathrm{D}f(a)$ est encore surjective.
(2) Montrer que l'on peut compléter les fonctions X_i $(i = 1, \ldots, p)$ en un système de coordonnées locales $(X_1, \ldots, X_n)$ sur un voisinage V de a dans $\mathbb{R}^n$.
(3) Montrer que f est une application ouverte sur V. Montrer que f admet un inverse à droite sur un voisinage W de a.

Application : On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. On se fixe une matrice $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, symétrique et *inversible*. Montrer qu'à toute matrice A suffisament proche de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on peut associer une matrice M telle que

$$A = {}^t M A_0 M$$

de telle sorte que l'application $A \mapsto M$ soit lisse.
En utilisant un développement de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, en déduire une preuve du lemme de Morse

Exercice 6. *Quadriques et cônes*
Soit Q une forme quadratique non-dégénérée de $\mathbb{R}^n$ de signature (p,q)

(1) (a) Montrer que la quadrique $Q^{-1}(\{1\})$ est une hypersurface lisse, c'est-à-dire une sous-variété de codimension 1, de $\mathbb{R}^n$.
    (b) Déterminer en tout point son espace tangent. Lorsque $p=2$ et $q=1$ montrer que la surface obtenue est réglée.
(2) On suppose $pq \neq 0$.
    (a) Montrer que $Q^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$ est aussi une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
    (b) Montrer que le cône $Q^{-1}(\{0\})$ n'est pas une sous-variété.

Exercice 7. *Hélicoïde droit*
Soient a et b deux réels non nuls, et

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (a\cos t, a\sin t, bt) \end{array}.$$

(1) (a) Prouver que $h = \varphi(\mathbb{R})$ est une courbe lisse de $\mathbb{R}^3$ (*hélice circulaire*).
    (b) Déterminer en tout point $(x,y,z) \in h$ la tangente à h.
(2) Soit H l'ensemble engendré par les droites orthogonales à l'axe (Oz) rencontrant h.
    (a) Montrer que H est une surface lisse et réglée de $\mathbb{R}^3$ (*hélicoïde droit*).
    (b) Déterminer en tout point $(x,y,z) \in H$ le plan tangent à H.

Exercice 8. *Quelques groupes classiques*
Dans cet exercice on identifie l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels avec $\mathbb{R}^{n^2}$. On notera Id_n la matrice identité d'ordre n.
On s'intéresse aux groupes suivants :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) & = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ \det(M) = 1\} & \textit{le groupe spécial linéaire}, \\ \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) & = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ {}^tMM = \mathrm{Id}_n\} & \textit{le groupe orthogonal euclidien}, \end{array}$$

Pour chacun d'eux,

(1) montrer que l'on a bien une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
(2) déterminer son espace tangent en tout point,
(3) dire si elle est ou non compacte.

indication : dans le cas du groupe orthogonal euclidien, remarquer que l'application qui à M associe ${}^tMM$ est à valeurs dans l'espace des matrices symétriques.

Exercice 9. *Cubique cuspidale*

(1) Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y^2 = x^3$ (*la cubique cuspidale*).
(2) Au voisinage de quels points $\mathcal{C}$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?
(3) Soit $\gamma :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée telle que $\gamma(0)$ soit un point de rebroussement. L'image de γ est-elle une sous-variété au voisinage de $\gamma(0)$?

Exercice 10. *Position d'une surface par rapport à son plan tangent* Soit S une surface lisse de R^3 d'équation $z = f(x,y)$. On suppose que $f(0,0) = 0$ et que $D^2f(0,0)$ est de signature $(1,1)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de 0 tel que $S \cap T_0S$ est la reunion de deux courbes lisses sécantes. [on utilisera le lemme de Morse]