Département Licence

K1BE6W14 Biomodélisation
Mathématiques 11 mai 2012
Durée : 3h00 Ph. Thieullen

*Les documents de cours et de TP sont autorisés. Les exercices sont indépendants ; les deux premiers sont plus faciles.*

**Exercice 1.** On appelle $x_n$ le nombre de globules rouges d'un individu un jour donné. On note $d(x_n)$ et $p(x_n)$ le nombre de cellules détruites et produites par jour. Le lendemain on a donc

$$x_{n+1} = x_n - d(x_n) + p(x_n) =: f(x_n).$$

On suppose que

$$d(x) = cx, \quad p(x) = ax\exp(-bx), \qquad a, b > 0 \text{ et } 1 > c > 0.$$

1. Déterminer les points d'équilibre et leur stabilité. (On discutera selon que $c < a$ ou $c > a$).
2. Tracer dans les deux cas, $c < a$ ou $c > a$, les courbes $y = f(x)$ et $y = x$. Puis dessiner l'évolution du système dans le plan $(x, y)$ pour quelques conditions initiales.

**Exercice 2.**

On considère trois espèces A, B et C interagissant selon le schéma fonctionnel

$$A \underset{1}{\overset{s}{\rightleftharpoons}} B \underset{1}{\overset{s}{\rightleftharpoons}} C$$

de taux de réaction constant $s$ et de concentration $a, b, c$.

1. En appliquant les lois cinétiques d'action de masse, déterminer les équations du système.
2. Trouver une loi de conservation entre $a, b, c$. En supposant qu'on ait initialement $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$, récrire les équations du système en éliminant la concentration $b$ sous la forme
$$\frac{da}{dt} = f(a, c), \quad \frac{dc}{dt} = g(a, c).$$
3. Déterminer l'unique point d'équilibre, la matrice jacobienne
$$\text{Jac} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial g}{\partial a} & \frac{\partial g}{\partial c} \end{bmatrix}$$
puis déterminer la stabilité du point d'équilibre en étudiant le signe de tr(Jac) et de det(Jac).

**Exercice 3.** On considère un problème de croissance de $N$ organismes décrits par le système

$$\frac{dN}{dt} = rN\Big(1 - \Big(\frac{N-K}{L}\Big)^2\Big)$$

1. En faisant un changement approprié de variables sans dimension pour $N$ et pour $t$, montrer que le système devient

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-(x-a)^2) =: f(x).$$

2. Déterminer les points d'équilibre du système. Puis tracer à la main les 3 graphes $\dot{x} = f(x)$, dans le plan $(x, \dot{x})$ correspondants aux différents cas

$$a > 1, \quad a = 1 \quad \text{et} \quad 0 < a < 1.$$

   (On observera que l'on demande de tracer le graphe d'un polynôme de degré 3 dont on connait ses racines).

3. On suppose $a > 1$. Déterminer la position du système à l'équilibre en fonction de sa position initiale $x_0 > 0$.
4. On suppose que $a = x_0 = 2$. Montrer que la position du système à chaque instant $\tau$ vérifie

$$\left(\frac{2}{x(\tau)}\right)^{1/3} \big(x(\tau)-1\big)^{1/2} \left(\frac{1}{3-x(\tau)}\right)^{1/6} = e^{\tau}, \quad \forall\, \tau \geq 0.$$

   On admettra le résultat suivant

$$\frac{1}{x(x-1)(3-x)} = \frac{-1/3}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/6}{3-x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

   En déduire que le système s'approche du point d'équilibre $x = 3$ avec une vitesse décrite par $(3 - x(\tau)) \sim be^{-6\tau}$ pour une constante $b$ à déterminer.

**Exrercice 4.** On considère le modèle épidémiologique SIR avec vaccination

$$\begin{aligned}
S_{t+1} &= (1-p)S_t - \frac{\beta}{N} I_t S_t + b(R_t + I_t) \\
I_{t+1} &= \frac{\beta}{N} I_t S_t + (1 - b - \gamma) I_t \\
R_{t+1} &= (1-b)R_t + \gamma I_t + pS_t
\end{aligned}$$

où $N$ est le nombre total d'individus, $0 < p+\beta < 1$ et $0 < b+\gamma < 1$. Le paramètre $b$ désigne le taux de naissance, $\gamma$ est le taux d'individus devenant résistants, $\beta$ est le taux de contact entre individus sains et individus infectés et $p$ est la proportion d'individus sains vaccinés. On note

$$N = S_0 + I_0 + R_0, \quad \rho = \frac{\beta b}{(b+\gamma)(p+b)}.$$

1. Dessiner le diagramme de Leslie à trois états $S, I, R$, en mettant sur chaque flèche d'un état à l'autre, les taux de naissance, de décès et de transfert correspondants.
2. Montrer que $S_t + I_t + R_t$ reste constant égal à $N$.
3. (On pourra admettre cette question) Montrer que $S_t, I_t, R_t$ restent positifs en tout temps positif.
4. Montrer que le système précédent devient

$$S_{t+1} = (1-p)S_t - \frac{\beta}{N} I_t S_t + b(N - S_t) =: f(S_t, I_t)$$
$$I_{t+1} = \frac{\beta}{N} I_t S_t + (1 - b - \gamma) I_t =: g(S_t, I_t)$$

Montrer que le système possède aux maximum deux points d'équilibre. On appellera $(S_*, I_*)$ celui à coordonnées strictement positives. Montrer que $(S_*, I_*)$ existe si et seulement si $\rho > 1$.
5. Ecrire la matrice jacobienne

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{bmatrix}$$

Rappeler la condition de stabilité de Jury et montrer que le point d'équilibre $\left(\frac{bN}{p+b}, 0\right)$ est stable si et seulement si $\rho < 1$.
6. On suppose que $\beta = 0.5$ et $b = \gamma = 0.05$. Déterminer la proportion minimale $p_{min}$ d'individus qu'il faut vacciner pour que $\rho < 1$. Déterminer alors la stabilité du point d'équilibre $(S_*, I_*)$ lorsque $p = \frac{1}{2} p_{min}$.

**Exercice 5.** On considère un modèle proie-prédateur

$$\frac{dh}{dt} = \beta h \left( \frac{p}{1+p} - \alpha h \right) =: f(h,p)$$
$$\frac{dp}{dt} = p \left( (\gamma - p) - \frac{h}{1+p} \right) =: g(h,p).$$

dans lequel $(h, p)$ modélisent des quantités sans dimension associées aux nombres d'herbivore et de planctons. On supposera que les constantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont strictement positives et on ne s'intéressera qu'aux conditions initiales $h_0 \geq 0$ et $p_0 \geq 0$. Pour simplifier, on fera l'hypothèse $0 < \gamma < 8$.

1. Question préliminaire. On pose $f(p) = \alpha(\gamma - p)(1+p)^2$.
   (a) En tracant à la main les deux courbes $q = p$ et $q = f(p)$ (polynôme de degré 3 dont on connait ses racines), montrer que l'équation $p = f(p)$ admet au moins une solution $p$ dans $]0, \gamma[$ et aucune solution $p$ dans $]-\infty, 0]$ et $[\gamma, +\infty[$.
   (b) On admettra que sous les hypothèses $0 < \gamma < 8$, l'équation $p = f(p)$ n'a qu'une seule solution dans $]0, \gamma[$.

2. Montrer qu'il existe exactement 3 points d'équilibre. (On notera par $(h_*, p_*)$ le point d'équilibre à coordonnées strictement positives qu'on ne calculera pas explicitement).
3. Tracer un diagramme dans le plan $(h, p)$, $h > 0$ et $p > 0$ contenant :
   (a) les 3 points d'équilibre,
   (b) les h-nulclines et p-nulclines,
   (c) la direction du champ de vecteur sur les nulclines et à l'intérieur des 4 quadrants délimités par ces nulclines. Lesquelles de ces nulclines sont aussi des trajectoires ?
4. Déterminer la matrice jacobienne aux 3 points d'équilibre

$$\text{Jac} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial h} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial h} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{bmatrix}$$

   (a) Déterminer le type de point (nœud, selle, spirale, centre) pour les deux points d'équilibre se situant sur l'axe des $p$.
   (b) Montrer qu'au point $(h_*, p_*)$, la matrice jacobienne est égale à

$$\text{Jac} = \left(\frac{p_*}{1+p_*}\right) \begin{bmatrix} -\beta & \beta\dfrac{\gamma - p_*}{p_*} \\ -1 & \gamma - 1 - 2p_* \end{bmatrix}.$$

   (c) Rappeler le critère de stabilité des systèmes en temps continu.
5. On suppose $0 < \gamma \leq 1$. En étudiant le signe de tr(Jac) et de det(Jac), montrer que le point d'équilibre $(h_*, p_*)$ est stable.
6. On note R le rectangle $R = \{(h, p) \ : \ 0 < h \leq 1/\alpha, \ 0 < p \leq \gamma + 1\}$. En tracant le champ de vecteur aux bords de $R$, montrer que toute trajectoire initialement dans $R$, $(h_0, p_0) \in R$, reste indéfiniment dans $R$ ultérieurement.
7. On suppose que $\gamma = 4$, $\alpha = 1/12$ et $\beta = 1/2$. Montrer que le point d'équilibre est égal à $(h_*, p_*) = (6, 1)$, que la matrice jacobienne en $(h_*, p_*)$ a ses 2 valeurs propres strictement positives et que le système possède alors un cycle limite.