Variables aléatoires discrètes et lois usuelles

Exercice 1. *Dans le tableau suivant, la première ligne correspond aux valeurs possibles que peut prendre une variable aléatoire X, la deuxième ligne aux probabilités avec lesquelles ces valeurs apparaissent :*

k	-2	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.5	0.2	0.2

(1) Calculer l'espérance, la variance, l'écart-type de X.
(2) Déterminer la loi de X^2 de $|X|$. Calculer de deux manières $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(|X|)$.

Exercice 2. *Une v.a. X peut prendre l'une des trois valeurs 0, 1 ou 2 avec des probabilités positives ou nulles. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4}$.*

Exercice 3. *On lance une pièce en l'air. Si "face" arrive, on note dans une variable X le valeur d'un dé qu'on lance au hasard. Si "pile" arrive, on note la somme des valeurs de deux dés lancés au hasard (on supposera qu'ils sont discernables).*
(1) Calculer $\sum_{i=1}^{6} i = 1+2+3+4+5+6$, $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} i+j = (1+1)+(1+2)+\cdots+(6+6)$ puis $\sum_{i=1}^{6} i^2$, $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i+j)^2$.
(2) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 4. *Une urne contient six boules dont 4 blanches et 2 noires. On extrait une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On effectue ensuite des tirages sans remise jusqu'à l'obtention d'une boule de la même couleur que précédement. Déterminer la loi de probabilité du nombre X de tirage après remise de la boule tirée initialement.*

Exercice 5. *Un joueur paie une mise de 150 euros pour participer à un jeu où il doit obtenir deux fois "pile" successivement en quatre lancers au plus d'une pièce de monnaie. Soit X le nombre de lancers pour obtenir deux fois "piles" successsivement ; on prendra $X = +\infty$ s'il n'arrive pas à obtenir deux fois "pile". Son gain est alors $G = 2 * 17^{4-X} - 150$ ou bien $G = -150$ si $X = +\infty$. Calculer alors l'espérance de son gain.*

Exercice 6. *(Difficile) Un garagiste commande au constructeur N voitures. On appelle X le nombre de voitures qu'il pourrait vendre dans l'année. On admet que X suit une loi uniforme sur $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ pour $n = 50 > N$. Toute voiture vendue rapporte au garagiste un bénéfice de $a = 10000$ euros et toute voiture invendue entraîne une perte de $b = 5000$ euros. On appelle G = (bénéfice - perte), le gain du garagiste en fin d'année.*

1. *Déterminer le gain comme une fonction de X, a et b sur chaque événement $\{X \leq N\}$ et $\{X > N\}$.*
2. *Calculer l'espérance du gain du garagiste en fonction de N, a et b. (On utilisera la formule théorique $\sum_{i=1}^{N} i = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{1}{2}N(N+1)$).*

3. *Déterminer la valeur numérique de N pour que la commande soit optimale.*

Exercice 7. *Un lot de bulbes de tulipes a un pouvoir germinatif de* 80%. *Chaque bulbe contient un et un seul des trois gènes R (rouge), B (blanc) et J (jaune) qui détermine la couleur de la fleur. On suppose que la probabilité que le bulbe possède le gène R, B ou J est égale respectivement à* 0.5, 0.1 *et* 0.4. *Dans la suite, on plante 5 bulbes.*

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir 5 fleurs ?*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 fleurs ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'un bulbe planté produise une fleur rouge ?*
4. *Soit X la v.a. donnant le nombre de fleurs rouges obtenues. Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance et son écart-type.*

Exercice 8. *La v.a. X représente le chiffre obtenu après le lancer d'un dé à* 6 *faces.*

1. *Déterminer la loi de $Y = X(7 - X)$. Calculer $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(Y)$.*
2. *(Difficile) On considère maintenant n lancers in épendants et Y_1, Y_2, ..., Y_n, les résultats correspondants. Déterminer la loi de la v.a. égale à la plus grande de ces valeurs. (Indication : déterminer plutôt la fonction de répartition $F(k)$).*

Exercice 9. *Une centrale de réservations reçoit en moyenne entre 10h et 12h, 72 appels téléphoniques à l'heure. On modélise ce phénomène par une variable aléatoire de Poisson.*

1. *Déterminer la probabilté pour qu'entre 11h et 11h01 on ait exactement un appel.*
2. *Déterminer la probabilité pour qu'entre 11h et 11h01 on ait au moins deux appels.*

Exercice 10. *On estime, qu'en moyenne, 5 bits sur 10000 sont erronés lors de la transmission d'un message entre deux ordinateurs. Sur un message de 75 bits, calculer la probabilité pour qu'il y ait 0, 1, 2, 3 bits erronés. Reprendre ce calcul en prenant la loi de Poisson.*

Exercice 11. *Au contact d'une parcelle de maïs génétiquement modifié, une étude sur une parcelle saine montre qu'un épi de maïs sur 100 est modifié. Calculer la probabililité que, sur 100 épis, l'un d'entre eux au moins ait été modifié.*

Exercice 12. *On admet qu'un quart des personnes d'une population de taille n est vacciné contre la grippe. Au cours d'une période d'épidémie, on constate que* 15% *des personnes malades sont vaccinés et que* 8% *des personnes vaccinées sont malades.*

1. *Calculer la probabilité qu'une personne non vaccinée tombe malade.*
2. *On note S le nombre de personnes malades pendant l'épidémie. Calculer la loi de S (en fonction de n) puis sa moyenne et sa variance.*

3. *Sur un groupe de $n = 20$ personnes, calculer la probabilité qu'au moins 3 personnes soient malades.*

Exercice 13. *Une étude réalisée en 2006 par l'institut de sondage CSA montre que* 54% *des Français sont chrétiens,* 31% *sans-religion,* 4% *musulmans,* 1% *juifs et* 10% *autres. La France compte alors 60 millions d'habitants. On constitue un échantillon de 7 personnes.*

- *Quelle est la probabilité d'avoir une majorité de chrétiens dans l'échantillon ?*
- *Quelle est la probabilité de ne pas avoir de musulmans ?*
- *Quel est le nombre moyen de sans-religion ?*