Département Licence

Année 2005–2006 | 4 Janvier 2006
SVTE | SVT101
Mathématiques | Durée : 1h30
Ph. Thieullen

Aucun document n'est autorisé. Toute réponse non justifiée est considérée comme fausse. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 2y' + 2y = xe^x.$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation homogène.
2. Déterminer la solution générale de l'équation (E).
3. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 2. On considère une variable aléatoire continue X de densité

$$\begin{cases} f(x) = kx(1 - \cos x) & \text{pour } x \in [0, 2\pi] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour une certaine constante k.

1. Déterminer k pour que la fonction $f(x)$ soit une densité ?
2. Déterminer l'espérance de la variable $\phi(X)$ avec $\phi(x) = 1/x$.

Exercice 3. On admet le modèle suivant de la coloration de l'iris. La coloration est gérée par un couple d'allèle B ou b. L'allèle b correspond à la coloration bleue et l'allèle B à la coloration non-bleue ; de plus b est récessif (seul bb donnera effectivement un iris bleu). On appellera génotype, l'un des trois couples d'allèles possibles BB, Bb ou bb et on confondra $Bb = bB$.

On suppose que les génotypes possibles de Madame D... sont BB et Bb avec probabilité $1/3$ et $2/3$ et que le génotype de Monsieur D... est Bb.

1. Monsieur et Madame D... vont avoir leur premier enfant ; quelle est la probabilité pour qu'il ait les yeux bleus ? De même, quelle est la probabilité que le génotype de l'enfant soit BB ou Bb ?
2. Monsieur et Madame D... viennent d'avoir un enfant. Il n'a pas les yeux bleus. Quelle est la probabilité pour qu'il puisse transmettre l'allèle b ?

Exercice 4. Un ensemble de 785 tests est réalisé au moment du lancement de la fusée Ariane. Si un seul test échoue, le lancement est différé. La probabilité pour qu'un test échoue est de 1 chance sur 10 000 et chaque échec est indépendant d'un test à l'autre. On appellera X la variable aléatoire égale au nombre d'échecs.

1. Déterminer la loi de la variable X, rappeler la formule $\mathbb{P}(X = k)$, déterminer l'espérance et l'écart-type de X.
2. Par quelle loi peut-on approcher celle de X ?
3. Déterminer la probabilité que le lancement soit différé.

Exercice 5. Suite à la reprise progressive du trafic après une période de grève, la SNCF décide de mettre en service deux TGV, A et B de 820 places assises chacun, au lieu d'un, pour transporter les 1600 voyageurs attendant sur le quai. Chaque voyageur choisit l'un ou l'autre des TGV avec même probabilité et sans avoir le temps de changer de train dans l'éventualité où l'un se trouve surchargé. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de voyageurs qui sont montés dans le TGV A.

1. Quelle est la loi de la variable X, son espérance, son écart-type ?
2. Déterminer la probabilité que des passagers restent debout dans le TGV A ? Déterminer la probabilité que des passagers restent debout dans l'un des deux TGV ?
3. Combien de places supplémentaires faudrait-il ajouter dans le TGV A pour que la probabilité que des passagers restent debout dans celui-ci soit inférieure à 5% ?

Barême : exo1=**40**, exo2=**30**, exo3=**40**, exo4=**35**, exo5=**55**

Corrigé de l'examen de janvier 2006

Exercice 1.

1. L'équation caractéristique est donnée par $r^2 - 2r + 2 = 0$ et admet pour racines, $r = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$. La solution générale de léquation homogène est donc
$$y(x) = e^x(A\cos x + B\sin x).$$
2. Comme le second membre s'écrit sous la forme $P(x)e^{kx}$ où $P(x)$ désigne un polynôme et $k = 1$ un scalaire différent de $1 \pm i$, on est en droit de rechercher une solution particulière $y_P(x)$ sous la forme $y_P(x) = (ax+b)e^x$. On trouve après calcul $y_P''(x) - 2y_P'(x) + 2y_P(x) = (ax+b)e^x$ et après identification au second membre donné xe^x, $a = 1$ et $b = 0$, soit la solution particulière $y_P(x) = xe^x$ et la solution générale de l'équation complète (E),
$$y(x) = xe^x + e^x(A\cos x + B\sin x).$$
3. On cherche A et B pour que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. On trouve d'abord
$$y'(x) = (x+1)e^x + e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x).$$
Les deux conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ amènnent à un système de deux équations $y(0) = A = 1$ et $y'(0) = 1 = 1 + (A+B)$, d'où $A = 1$ et $B = -1$, soit
$$y(x) = xe^x + e^x(\cos x - \sin x).$$

Exercice 2.

1. On constate d'abord que la fonction $f(x)$ est bien positive ou nulle. Il reste à montrer que son intégrale est égale à 1.
$$\begin{aligned}1 = \int_0^{2\pi} kx(1-\cos x)\,dx &= k\Big\{[x(x-\sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(x-\sin x)\,dx\Big\}\\ &= k\Big\{(2\pi)^2 - [\frac{1}{2}x^2 + \cos x)_0^{2\pi}\Big\} = k\Big\{(2\pi)^2 - \frac{1}{2}(2\pi)^2\Big\} = 2\pi^2.\end{aligned}$$
D'où $k = \frac{1}{2\pi^2}$.
2. Par définition d'une densité, on obtient
$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{X}\Big] = \int_0^{2\pi}\frac{1}{x}\frac{1}{2\pi^2}x(1-\cos x)\,dx = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}(1-\cos x)\,dx.$$
D'où $\mathbb{E}[1/X] = \frac{1}{\pi}$.

Exercice 3. On peut décrire l'espace de probabilité aussi bien en termes d'événements élémentaires qu'à l'aide de variables aléatoires pourvu quelles soient en nombre suffisant. On introduit ainsi la variable «mère»prenant deux valeurs possibles BB et Bb et la variable «enfant»prenant les valeurs BB, Bb et bb. La variable «père»n'est pas introduite car elle est constante égale à Bb.

1. La loi de la variable «mère» est donnée par l'énoncé, soit
$$\mathbb{P}(\text{mère} = BB) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(\text{mère} = Bb) = \frac{2}{3}.$$
Il reste à déterminer les lois conditionnelles de la variable «enfant» sachant celle de leur «mère». Si la mère possède le génotype BB, en lisant le tableau de croisement équiprobable suivant

	mère $= B$	**mère** $= B$
père $= B$	BB	BB
père $= b$	Bb	Bb

on obtient
$$\mathbb{P}(\text{enfant} = BB \mid \text{mère} = BB) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(\text{enfant} = Bb \mid \text{mère} = BB) = \frac{1}{2}.$$
Si maintenant le génotype de la mère est Bb, le tableau

	mère $= B$	**mère** $= b$
père $= B$	BB	Bb
père $= b$	Bb	bb

donne
$$\mathbb{P}(\text{enfant} = BB \mid \text{mère} = Bb) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(\text{enfant} = Bb \mid \text{mère} = Bb) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(\text{enfant} = bb \mid \text{mère} = Bb) = \frac{1}{4}.$$
On obtient alors la loi de la variable «enfant», par exemple de la manière suivante
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{enfant} = BB) &= \mathbb{P}(\text{enfant} = BB \mid \text{mère} = BB)\mathbb{P}(\text{mère} = BB)\\ &\quad + \mathbb{P}(\text{enfant} = BB \mid \text{mère} = Bb)\mathbb{P}(\text{mère} = Bb)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$
La loi complète est donnée par le tableau

génotype	BB	Bb	bb
probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

En particulier, la probabilité d'avoir un enfant aux yeux bleus est de $\frac{1}{6}$.

2. L'enfant qui vient de naître n'a pas les yeux bleus et possède donc comme génotype BB ou Bb. Il ne peut transmettre l'allèle b que si son génotype est Bb. On demande donc de calculer

$$\frac{\mathbb{P}(\text{enfant} = Bb)}{\mathbb{P}(\text{enfant} = BB) + \mathbb{P}(\text{enfant} = Bb)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Exercice 4.

1. La variable X est une variable binomiale de paramètre $n = 785$ et $p = 1/10000$. Sa loi est donnée explicitement par la formule

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{785}{k} (0.0001)^k (0.9999)^{785-k}.$$

On sait alors que $\mathbb{E}[X] = np = 0.0785$ et que l'écart-type vérifie $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 0.2802$.

2. Nous nous trouvons dans le cas où n est grand et $\lambda = np$ petit. La loi binomiale s'approche alors de la loi de Poisson : pour des petites valeurs de k, $\mathbb{P}(\mathcal{B}(n,p) = k) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{P}(\lambda) = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

3. En utilisant l'approximation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{lancement différé}) &= \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)\\ &= 1 - e^{-\lambda} = 1 - 0.924502 \simeq 0.075.\end{aligned}$$

Sans approximation, on aurait obtenu $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - (0.9999)^{785} = 0.924498 \simeq 0.075$.

Exercice 5.

1. La variable X suit une loi binomiale de parmètre $n = 1600$ et $p = \frac{1}{2}$. On applique alors les formules classiques : $\mathbb{E}[X] = np = 800$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = 20$. On constate ici, comme n et np sont grands, qu'on peut approximer la loi de X par une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = np$ et $\sigma^2 = np(1-p)$.

2. Des passagers resteront debout dans le TGV A si X est supérieur au nombre de places offertes :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{des passagers restent debout dans A})\\
&\quad = \mathbb{P}(X > 820) = \mathbb{P}\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{820-\mu}{\sigma}\Big) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 1)\\
&\quad = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < 1) = 1 - 0.8413 = 9.1587 \simeq 16\%.
\end{aligned}$$

Des passagers restent debout dans l'un ou l'autre des TGV si $X > 820$ ou si le nombre de personnes montées dans B est supérieur au nombre de places offertes :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{des passagers restent debout dans A ou B})\\
&\quad = \mathbb{P}(X > 820 \text{ ou } 1600 - X > 820) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} > 1 \text{ ou } \frac{X-\mu}{\sigma} < -1)\\
&\quad = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 1) + \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < -1) = 2\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 1)\\
&\quad = 2(1 - \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < 1)) = 2(1 - 0.8413) = 0.3174 \simeq 32\%.
\end{aligned}$$

3. On appelle N, le nombre total de places du TGV A, y compris les places supplémentaires. On cherche alors à résoudre pour quelle valeurs de N on a $\mathbb{P}(X > N) < 5\%$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > N) < 5\% &\Leftrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{N-\mu}{\sigma}\Big) < 5\%\\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}\Big(\mathcal{N}(0,1) > \frac{N-\mu}{\sigma}\Big) < 5\%
\end{aligned}$$

Nécessairement $(N-\mu)/\sigma > 0$ et en introduisant le quantile $z_{10\%}$ de la valeur absolue de la loi normale, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > N) < 5\% &\Leftrightarrow \mathbb{P}\Big(|\mathcal{N}(0,1)| > \frac{N-\mu}{\sigma}\Big) < 10\%\\
&\Leftrightarrow \frac{N-\mu}{\sigma} > z_{10\%} \Leftrightarrow N > \mu + z_{10\%}\sigma\\
&\Leftrightarrow N > 800 + 20 * 1.645 \simeq 833.
\end{aligned}$$

Le nombre de places supplémentaires est donc au moins égal à 13.