



Département Licence

Année 2004–2005 11 mars 2005
 SVTE SVT201
 Mathématiques Durée : 1h20
 Ph. Thieullen

Les exercices sont indépendants. Les notes de cours sont interdites. Pour tout calcul statistique effectué avec la calculatrice, il est demandé d'accompagner le résultat numérique, de la formule mathématique correspondante.

Exercice 1. On considère les deux matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer AB et en déduire la matrice inverse A^{-1} .
2. En utilisant la question précédente, résoudre le système

$$\begin{cases} y - z = -1 \\ -x + 2y - 2z = -1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. On considère le système

$$\begin{cases} x + my = m \\ 3(m-1)x + 6y = m^2 + 2m - 2 \end{cases}$$

où m est un paramètre.

1. En remplaçant x dans la deuxième équation, montrer qu'on obtient

$$3(m+1)(2-m)y = (2m-1)(2-m).$$

2. Résoudre le système en déterminant suivant les valeurs du paramètre l'ensemble des solutions.

Exercice 3. Résoudre par la méthode du pivot (en précisant bien quels sont les pivots et quelles opérations de lignes sont effectuées) le système suivant

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ 3x + 6y + z = 10 \end{cases}$$

Exercice 4. 30 vaches laitières reçoivent une alimentation spéciale. Le tableau suivant donne la quantité de matière grasse, en g/kg, du lait que chacune des vaches produit.

30.5	29.4	26.3	25.2	41.4	42.4	20.3	35.7	26.4	30.9
25.4	32.7	31.9	33.6	35.0	34.3	30.7	34.1	38.6	41.7
40.3	21.8	36.5	33.1	34.6	35.0	35.9	33.3	37.2	33.3

1. Déterminer le tableau des effectifs suivant les classes

[20, 24[[24, 28[[28, 32[[32, 36[[36, 40[[40, 44[

2. Tracer l'histogramme des effectifs du tableau précédent.
3. En prenant le centre de chaque classe comme valeur moyenne de la classe, calculer la moyenne observée \bar{x} et l'écart-type observée s_n des effectifs précédents.
4. Déterminer la classe médiane et la médiane de cette distribution.

Exercice 5. La durée de vie d'une lampe halogène fabriquée par l'entreprise LUMINOR est supposée normalement distribuée de moyenne 8640 heures et d'écart-type 1440 heures.

1. Calculer la probabilité qu'une lampe dure au moins 9610 heures.
2. Quelle durée minimale, le fabricant peut-il garantir sur la notice de la lampe en se permettant au plus 5% d'erreur ?

Barème indicatif sur 200 : 25 - 40 - 30 - 75 - 30.

Corrigé du devoir surveillé de Mars 2005

Exercice 1.

1. Le calcul donne $AB = \text{Id}$ et donc $A^{-1} = B$.
2. Le système peut se ré-écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Exercice 2.

1. En remplaçant $x = m - my$ dans la deuxième équation on trouve

$$3(1+m)(2-m)y = -2m^2 + 5m - 2 = (2m-1)(2-m).$$

2. (a) Ou bien $m \neq 2$ et $m \neq -1$, alors $y = \frac{1}{3}(2m-1)/(m+1)$ et $x = \frac{1}{3}m(m+5)/(m+1)$.
 (b) Ou bien $m = 2$, alors $x = 2(1-y)$, il existe une infinité de solutions.
 (c) Ou bien $m = -1$, alors l'équation n'a pas de solution.

Exercice 3. On commence par permuter les deux premières lignes. Puis on réalise les opérations de lignes suivantes : $L_1 \rightarrow L_1$, $L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1$ en utilisant 1 comme pivot. On trouve

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 0 \\ 9y - 7z = 2 \\ 18y - 8z = 10 \end{cases}$$

En se servant de la deuxième ligne comme ligne de pivot et en réalisant l'opération $L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2$, on obtient

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 0 \\ 9y - 7z = 2 \\ 6z = 6 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $x = y = z = 1$.

Exercice 4.

1. On réunit pour chaque classe, le nombre des effectifs correspondants :

Classes	20–22	22–24	24–26	26–28	28–30	30–32
Effectifs	2	0	2	2	1	4
Classes	32–34	34–36	36–38	38–40	40–42	42–44
Effectifs	4	8	2	1	2	2

2. L'histogramme est donné par

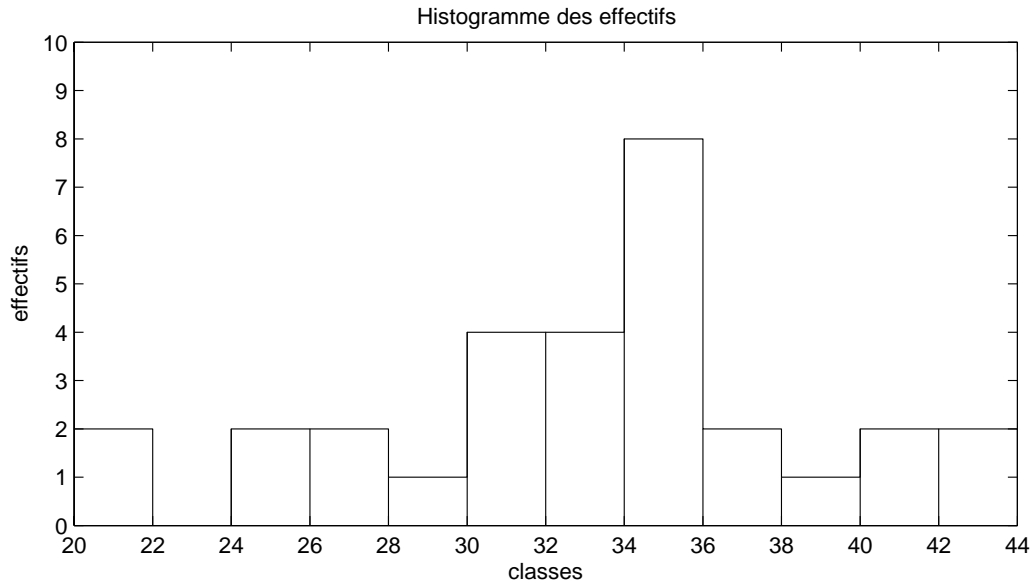


FIG. 1 – Histogramme des effectifs

3. La moyenne observée se calcule en utilisant la formule

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1\xi_1 + n_2\xi_2 + \dots)$$

où n est le total des effectifs, n_1, n_2, \dots sont les effectifs des classes et ξ_1, ξ_2, \dots sont les centres des classes. On trouve

$$\bar{x} = \frac{1}{30}(2 * 21 + 0 * 23 + 2 * 25 + \dots) \simeq 33.$$

L'écart-type observé s'obtient à partir de la formule

$$\begin{aligned} s_n^2 &= \frac{1}{n}(n_1(\xi_1 - \bar{x})^2 + n_2(\xi_2 - \bar{x})^2 + \dots) \\ &= \frac{1}{30}(2 * (21 - 33)^2 + 0 * (23 - 33)^2 + 2 * (25 - 33)^2 + \dots) \simeq 32 \end{aligned}$$

On obtient comme écart-quadratique, $s_n \simeq 6$.

4. La classe médiane et la médiane se calculent en contruisant d'abord la courbe des effectifs cumulés

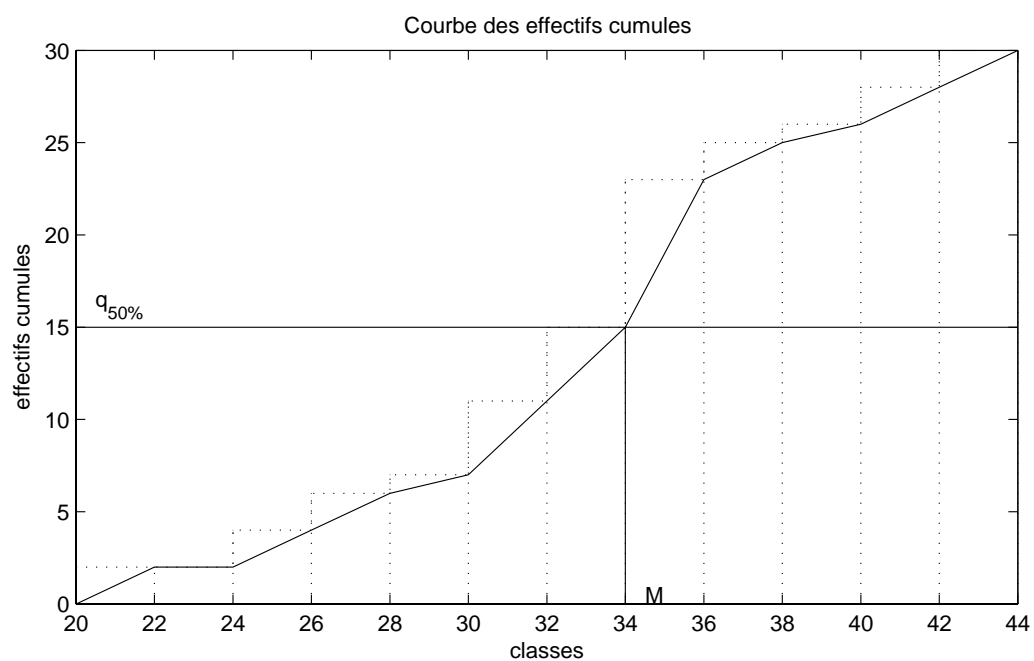


FIG. 2 – Histogramme des effectifs

On en déduit la classe médiane $[32, 34[$ et la médiane $M = 34$.