Corrigé de l'examen de janvier 2005

Exercice 1.

(1) On commende par déterminer la solution générale de l'équation homogène (H). L'équation carastéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ et admet pour solution $r = 1$ avec multiplicité 2. La solution générale de (H) est donc

$$y_H(x) = (\lambda + \mu x)e^x.$$

On recherche maintenant une solution particuli'ere de léquation non homogène (E). Comme le second membre est de la forme $f(x) = 1 = e^{0*x}$ et que 0 n'est pas solution de l'équation carastéristique on cherche une solution particulière $y_P(x)$ sous la forme $y_P(x) = const$. On trouve $y_P(x) = 1$, d'où la solution générale de (E)

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = (\lambda + \mu x)e^x + 1.$$

(2) On cherche λ et μ tels que $y(-1) = y'(-1) = 0$. On détermine d'abord $y'(x) = (\lambda + \mu + \mu x)e^x$. Puis on résoud le système

$$y(-1) = (\lambda - \mu)e^{-1} + 1 = 0, \qquad y'(-1) = \lambda e^{-1} = 0.$$

On trouve alors $\lambda = 0$ et $\mu = e$. D'où la solution de (E) vérifiant les conditions initiales demandées :

$$y(x) = 1 + xe^{x+1}.$$

Exercice 2.

(1) Sur chacun des intervalles $]-\infty, -3[$, $[-3, 0]$, $[0, 3]$ et $[3, \infty[$, le graphe de $f(x)$ est une droite. Il suffit donc de tracer les points $(x, y = f(x))$ en chaque extrémité de ces intervalles. On trouve

La fonction $f(x)$ est la densité d'une v.a. si $f(x) \geq 0$ et si $\int f(x)\,dx = 1$. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 9k = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{1}{9}.$$

Pour le calcul de l'intégrale, on remarque que $\int f(x)\,dx$ représente l'aire du domaine situé sous la courbe. C'est l'aire d'un triangle qu'on peut calculer en utilisant la formule classique $aire = \frac{1}{2}\ base \times hauteur$.

(2) Par définition, la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du.$$

Il faut distinger 4 cas :
- si $x < -3$, $f(x) = 0$ pour $u \in]-\infty, x]$ et donc $F(x) = 0$,
- si $x > 3$, $F(x) = \int_{-3}^{3} f(u)\, du = 1$,
- si $x \in [-3, 0]$, $F(x) = \int_{-3}^{x} f(u)\, du$

$$F(x) = \frac{1}{2}\, base \times hauteur = \frac{1}{2}(x+3)f(x) = \frac{1}{18}(x+3)^2,$$

- si $x \in [0, 3]$, $F(x) = \int_{-3}^{0} f(u)\, du + \int_{0}^{x} f(u)\, du$

$$\begin{aligned} \int_0^x f(u)\, du &= \frac{1}{2}\, base \times (bord\ gauche + bord\ droit) \\ &= \frac{1}{2}x(\frac{1}{3} + \frac{3-x}{9}) = \frac{1}{18}x(6-x) \\ F(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{18}x(6-x). \end{aligned}$$

Le graphe a donc l'allure suivante (il est composé de deux morceaux de paraboles)

(3) On demande de calculer $\mathbb{P}(X > 2)$

$$\mathbb{P}(X > 2) = \frac{1}{2}(3-2)f(2) = \frac{1}{18} = 5.6\%.$$

Exercice 3. A chaque CD-Rom on peut associer deux informations : le CD-Rom est défectueux ou non, le CD-Rom est éliminé ou non. L'ensemble fondamental est donc constitué de tous les CD-Rom qu'on peut ranger de deux manières différentes : dans D ou son complémentaire $\bar{D}$, dans E ou son complémentaire $\bar{E}$. D'où

$$\Omega = \{DE,\ D\bar{E},\ \bar{D}E,\ \bar{D}\bar{E}\}.$$

Les CD-Rom défectueux, qu'ils soient éliminés ou non, sont rassemblés dans $D = \{DE,\ D\bar{E}\}$. L'énoncé donne les informations suivantes :

$$\mathbb{P}(D) = 30\%, \quad \mathbb{P}(E|D) = 90\%, \quad \mathbb{P}(\bar{E}|\bar{D}) = 80\%.$$

(1)

$$\mathbb{P}(DE) = \mathbb{P}(E|D)\mathbb{P}(D) = 90\% * 30\% = 27\%,$$
$$\mathbb{P}(\bar{D}\bar{E}) = \mathbb{P}(\bar{E}|\bar{D})\mathbb{P}(\bar{D}) = 80\% * 70\% = 56\%,$$
$$\mathbb{P}(D\bar{E}) = \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(DE) = 30\% - 27\% = 3\%.$$

On peut résumer ces calculs dans un tableau des événements simultanés :

Ω	E	E	
D	27%	3%	30%
$\bar{D}$	14%	56%	70%
	41%	49%	100%

(2) La probabilité qu'un CD-Rom soit élimié est donné par

$$\mathbb{P}(E) = 41\%.$$

(3) Si un CD-Rom est éliminé, la probabilité qu'il soit déffectueux est donné par

$$\mathbb{P}(D|E) = \frac{\mathbb{P}(DE)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{27}{41} = 66\%.$$

Exercice 4. La motion est acceptée s'il y a au moins 3 personnes parmi les 6 membres à avoir voté « oui ». Si à chacun des membres, $i = 1, 2 \cdots, 6$, on associe une v.a. de Bernoulli X_i, valant 1 lorsque la personne vote « oui » et 0 sinon, le nombre total de personnes membres votant « oui » est donc égal à $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_6$. La variable X suit une loi de binomiale de paramètre $n = 6$, $p = 0.4$. On demande de calculer $\mathbb{P}(X \geq 3)$, on a :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X=0) & = (0.6)^6 = 4.7 \\ \mathbb{P}(X=1) & = 6*(0.4)*(0.6)^5 = 18.7 \\ \mathbb{P}(X=2) & = 15*(0.4)^2*(0.6)^4 = 31.1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{P}(X \leq 2) & = 54.4 \\ \mathbb{P}(X \geq 3) & = 45.6 \end{cases}$$

Exercice 5.

(1) On suppose que l'automobiliste choisit la deuxième option. Pour chaque jour de travail on définit une variable de Bernoulli X_i valant 1 si l'automobiliste est verbalisé, et 0 sinon. Par hypothèse, la probabilité d'être verbalisé est de 20%. Le nombre total de fois que l'automobiliste est verbalisé est donc égal à

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{225}.$$

X suit une loi binomiale $B(n, p)$ de paramètre $n = 225$ et $p = 0.2$. On sait alors calculer

$$\mathbb{E}(X) = np = 45, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 36.$$

(2) Le total des amendes est égal à $Y = 10X$. Alors

$$\mu = \mathbb{E}(Y) = 450, \quad \mathrm{Var}(Y) = 3600, \quad \sigma = 60.$$

(3) On suppose maintenant que Y suit la loi normale $N(\mu, \sigma)$. On introduit la variable centrée réduite correspondante $Z = (Y - \mu)/\sigma$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(450 < Y < 458) &= \mathbb{P}(0 < Z < \frac{458 - 450}{60}) = \mathbb{P}(0 < Z < \frac{8}{60}) \\ &= F(0.13) - F(0) = 0.5517 - 0.5 \simeq 5\%\end{aligned}$$

(4) On suppose ici que $S = 500$. L'automobiliste est gagnant si $\mathbb{P}(Y < S) \geq 75\%$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y < S) &= \mathbb{P}(Z < \frac{S - \mu}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z < \frac{50}{60}) \\ &= \mathbb{P}(Z < 0.83) = 0.7967 \simeq 80\%.\end{aligned}$$

L'automobiliste est donc gagnant.

(5) On cherche maintenant S pour que $\mathbb{P}(Y > S) \geq 75\%$. On se ramène encore à la variable centrée réduite Z :

$$25\% = \mathbb{P}(Y < S) = \mathbb{P}(Z < \frac{S - \mu}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z < z_0)$$

où on a posé $z_0 = (S - \mu)/\sigma$. On remarque d'abord que z_0 est nécessairement négatif ($25\% < 50\%$). La table ne donne cependant que la probabilité de dépassement de la variable symétrique $|Z|$. On transforme donc le calcul précédent

$$\mathbb{P}(Z > -z_0) = 0.25, \quad \mathbb{P}(|Z| > -z_0) = 0.5, \quad z_0 = -0.674.$$

D'où une offre promotionnelle $S = 450 - 0.674 * 60 > 409$.