Corrigé de l'examen de Juin 2007

Exercice 1.

1. Résoudre le système $AX = 0$ est équivalent à résoudre

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccl} x & + & y & = & 0 & L_1 \to L_1 \\ y & + & z & = & 0 & L_2 \to L_2 - L_1 \\ y & + & z & = & 0 & L_3 \to L_3 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc une droite

$$\mathcal{S} = \{(x, -x, x) \ : \ x \text{ quelconque}\}$$

passant par $(0, 0, 0)$ colinéaire au vecteur $(1, -1, 1)$. Si A était inversible, il existerait une matrice B telle que $BA = \mathrm{Id}$ (la matrice unité). En prenant le vecteur directeur précédent $X = (1, -1, 1)$, on arriverait à la contradiction $X = (\mathrm{Id})X = (BA)X = B(AX) = B0 = 0$.

2. La résolution de l'équation $AX = B$ revient à

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccl} x & + & y & = & 1 & L_1 \to L_1 \\ (m-1)y & + & z & = & 0 & L_2 \to L_2 - L_1 \\ y & + & z & = & 1 & L_3 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccl} x & + & y & = & 1 & L_1 \to L_1 \\ y & + & z & = & 1 & L_2 \to L_3 \\ & & (2-m)z & = & 1-m & L_3 \to L_2 + (1-m)L_3 \end{array}\right.$$

Ou bien $m = 2$, alors l'ensemble des solutions est vide. Ou bien $m \neq 2$, alors le système triangulaire précédent permet de résoudre succéssivement z, y et x. On trouve une unique solution

$$x = \frac{1-m}{2-m}, \quad y = \frac{1}{2-m}, \quad z = \frac{1-m}{2-m}.$$

Exercice 2.

1. On obtient la figure 1.

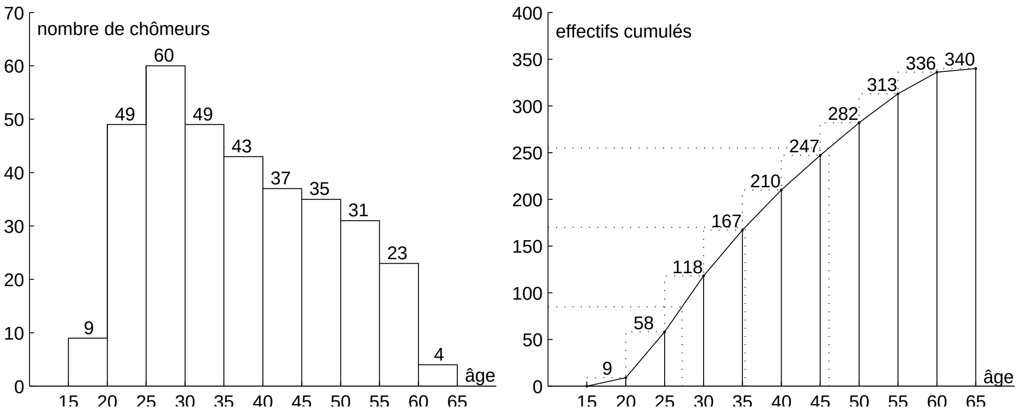

Fig. 1 – Histogramme et courbe des effectifs cumulés

2. On commence par partager l'effectif de la population en quatre parts égales : $0-85$, $85-170$, $170-255$ et $255-340$. Le second graphique permet de reconnaître sans calcul la classe d'âge médiane, soit $35-40$. L'âge médian $m = q_{50\%}$ est alors obtenu par la formule

$$\frac{m-35}{40-35} = \frac{170-167}{210-167}, \quad m = 35.35.$$

3. Le premier quantile $q_{25\%}$ et le troisième quartile $q_{75\%}$ sont obtenus de la même manière :

$$\frac{q_{25\%}-25}{30-25} = \frac{85-58}{118-58}, \quad q_{25\%} = 27.25$$
$$\frac{q_{75\%}-45}{50-45} = \frac{255-247}{282-247}, \quad q_{75\%} = 46.14.$$

On résume toutes ces informations dans le box-plot de la figure 2.

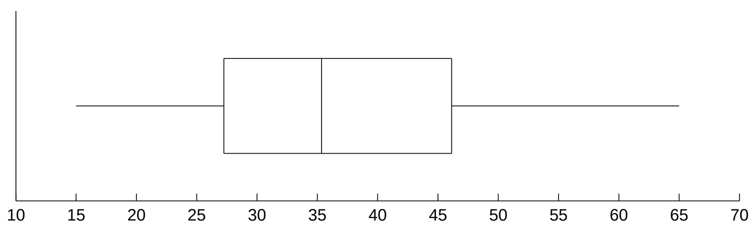

Fig. 2 – Distribution des chômeurs

Exercice 3. On commence par calculer la différence de rendement de chaque parcellle :

parcelle	1	2	3	4	5	6
rendement	-6	12	18	-9	12	12

On rappelle ensuite les estimateurs usuels de la moyenne et de la variance

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s_{n-1} = \Big(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\Big)^{1/2}.$$

L'intervalle de confiance de la différence de rendemant moyen μ est alors donné par

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_\alpha \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}},$$

où t_α est donné par la table de student. Le calcul numérique donne

$$\begin{array}{ll} n = 6 & t_\alpha = 2.571 \\ ddl = 5 & \bar{x} = 6.5 \\ \alpha = 5\% & s_{n-1} = 11.131 \end{array}$$

On trouve alors comme intervalle de confiance : $-5.1 \leq \mu \leq 18.2$.

Exercice 4.

1. On suppose ici que la distribution des poids suit réellement une distribution normale $N(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 3500$ g et $\sigma = 500$ g. Soit X une v.a. possédant une telle distribution et N une v.a. suiavnt la loi normale centrée réduite. On cherche à déterminer la distribution théorique des effectifs sous cette hypothèse H_0. Par exemple

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 2500) &= \mathbb{P}\Big(\frac{X - 3500}{500} < \frac{2500 - 3500}{500}\Big) \\ &= \mathbb{P}(N < -2) = 0.0228 \\ \mathbb{P}(2500 < X < 3000) &= \mathbb{P}(-2 < N < -1) \\ &= 0.1587 - 0.0228 = 0.1359 \\ \mathbb{P}(3000 < X < 3500) &= \mathbb{P}(-1 < N < 0) \\ &= 0.5 - 0.1587 = 0.3413. \end{aligned}$$

On réunit alors ces calculs dans un tableau.

poids	< 2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	> 4500
prob.	0.0228	0.1359	0.3413	0.3413	0.1359	0.0228
eff.	3.65	21.74	54.61	54.61	21.74	3.65