Corrigé du devoir surveillé de novembre 2005

Exercice 1.

1. $x+1 = a(2x+1)+b = 2ax+a+b$, par identification $2a = 1$ et $a+b = 1$, d'où $a = b = \frac{1}{2}$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c, \qquad \int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2(2x+1)} + c.$
3. En utilisant ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x+1}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\ln|2x+1| - \frac{1}{4(2x+1)} + c. \end{aligned}$$

(On aurait pu utiliser directement une intégration par partie.) On en déduit maintenant I :

$$I = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}[\ln 3 - 0] - \frac{1}{4}[\frac{1}{3} - 1] = \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{6}.$$

Exercice 2.

1. L'équation homogène est $2y' + y = 0$. D'où la solution générale $y(x) = \lambda \exp(-\frac{1}{2}x)$.
2. Si $y_{P,1}$, respectivement $y_{P,2}$, est solution de $2y' + y = f_1(x)$, respectivement $2y' + y = f_2(x)$, alors $y_{P,1} + y_{P,2}$ est solution de l'équation $2y' + y = f_1(x) + f_2(x)$.
3. On résoud d'abord $2y' + y = x\exp(-\frac{1}{2}x)$. Comme l'exposant du second membre est en résonnance simple avec la racine de l'équation, on cherche une solution particulière sous la forme

$$\begin{gathered} y = x(ax+b)e^{-\frac{1}{2}x} = (ax^2+bx)e^{-\frac{1}{2}x} \\ 2y' + y = (4ax+2b)e^{-\frac{1}{2}x} = xe^{-\frac{1}{2}x} \\ a = \frac{1}{4}, \qquad b = 0 \qquad \text{et donc} \qquad y(x) = \frac{1}{4}x^2e^{-\frac{1}{2}x}. \end{gathered}$$

On résoud ensuite $2y' + y = \sin(x)$. L'exposant du second membre est $\pm i$ et n'est donc pas en résonnance avec $\frac{1}{2}$. On cherche donc une solution sous la forme

$$\begin{gathered} y = a\cos(x) + b\sin(x) \\ 2y' + y = (2a+b)\cos(x) + (-2a+b)\sin(x) \\ 2b + a = 0,\ -2a + b = 1 \qquad \text{d'où} \qquad a = -\frac{2}{5},\ b = \frac{1}{5} \\ y(x) = -\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x). \end{gathered}$$

La solution générale de (E) est donc

$$y = (\frac{1}{4}x^2 + \lambda)e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x).$$

Exercice 3.

1. Le solutions de l'équation caratéristique $r^2 - 1 = 0$ sont $r = \pm 1$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}.$$

2. Comme l'exposant $k = 1$ du second membre est en résonnance avec une des deux racines, on cherche une solution particulière de léquation (E) de la manière suivante :

$$\begin{gathered} y(x) = x(ax+b)e^x = (ax^2 + bx)e^x \\ y'' - y = (4ax + 2a + 2b)e^x = (2x+1)e^x \\ 4a = 2,\ 2a + 2b = 1 \qquad a = \frac{1}{2},\ b = 0 \qquad y(x) = \frac{1}{2}x^2e^x \end{gathered}$$

La solution générale de (E) est donc $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + \lambda e^x + \mu e^x$.

3. Pour résoudre le problème avec conditions initiales, on part de la forme générale de $y(x)$ et on cherche à déterminer les valeurs de λ et de μ pour que $y(0) = -\frac{1}{2}$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$. On a

$$\begin{gathered} y'(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x + \lambda e^x - \mu e^{-x} \\ y(0) = \lambda + \mu = -\frac{1}{2},\ y'(0) = \lambda - \mu = \frac{1}{2} \qquad \lambda = 0,\ \mu = -\frac{1}{2}. \end{gathered}$$

D'où la solution : $y(x) = \frac{1}{2}(x^2e^x - e^{-x})$.

Exercice 4.

1. Le génotype du descendant est de la forme xy avec x et y choisis au hasard dans $\{A, a\}$. Les génotypes Aa et aA sont supposés correspondre au même phénotype. On obtient donc les premier tableau :

$y\backslash x$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{A}$	AA	Aa
$\boldsymbol{a}$	aA	aa

$y\backslash x$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A}$	AA	AA
$\boldsymbol{a}$	aA	aA

   Chaque cas de ce tableau est équiprobable et apparaît donc avec probabilité $\frac{1}{4}$. Les génotypes du descendant AA, Aa et aa se produisent donc avec probabilité $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.
   Dans le cas de deux parents de génotype AA et Aa on obtient les configurations du deuxième tableau. Les génotype du descendant AA et Aa se produisent avec probabilité $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

2. On commence par introduire l'ensemble fondamental correspondant à tous les croisements possibles (G_1, G_1) où G_1 et G_2 sont les génotypes du premier et du second parent :

$$\Omega = \{(AA, AA), (AA, Aa), (Aa, AA), (Aa, Aa)\}.$$

   muni des probabilités : $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$. Chaque croisement donne un descendant de génotype G_3 ; par exemple

$$\begin{cases} (AA, AA) \text{ donne sûrement } G_3 = AA, \\ (AA, Aa) \text{ donne } G_3 = AA \text{ et } G_3 = Aa \text{ avec probabilité } \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

   On obtient ainsi l'ensemble fondamental de tous les croisements possibles (G_1, G_2, G_3) :

$$\begin{array}{ll|l}
\text{(AA,AA)} & \rightarrow (AA, AA, AA) & \frac{1}{9} \\
(AA, Aa) & \rightarrow (AA, Aa, AA) & \frac{1}{2} * \frac{2}{9} \\
 & \searrow (AA, Aa, Aa) & \frac{1}{2} * \frac{2}{9} \\
(Aa, AA) & \rightarrow (Aa, AA, AA) & \frac{1}{2} * \frac{2}{9} \\
 & \searrow (Aa, AA, Aa) & \frac{1}{2} * \frac{2}{9} \\
(Aa, Aa) & \rightarrow (Aa, Aa, AA) & \frac{1}{4} * \frac{4}{9} \\
 & \searrow (Aa, Aa, Aa) & \frac{2}{4} * \frac{4}{9} \\
 & \searrow (Aa, Aa, aa) & \frac{1}{4} * \frac{4}{9}
\end{array}$$

   On calcule maintenant la probabilité que le génotype G_3 soit égal à l'un des AA, Aa ou aa :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_3 = AA) &= \mathbb{P}(AA, AA, AA) + \mathbb{P}(AA, Aa, AA) \\
&\quad + \mathbb{P}(aA, AA, AA) + \mathbb{P}(aA, aA, AA) = \frac{4}{9}, \\
\mathbb{P}(G_3 = Aa) &= \mathbb{P}(AA, Aa, Aa) + \mathbb{P}(Aa, AA, Aa) \\
&\quad + \mathbb{P}(Aa, Aa, Aa) = \frac{4}{9}, \\
\mathbb{P}(G_3 = aa) &= \mathbb{P}(Aa, Aa, aa) = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$