Diagramme de phase à température zéro

Philippe Thieullen

Université Bordeaux 1, Institut de Mathématiques

Bordeaux, 1 juillet 2010

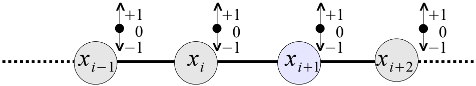
Le plan de l 'exposé

1. Exemple de Blume-Emery-Griffiths : BEG
2. Exemple de systèmes dynamiques couplés : Frenkel-Kontorova
3. Recherche d'un algorithme effectif : description sur un exemple

Exemple de Blume-Emery-Griffiths : BEG

Le modèle de BEG

- Un exemple de chaîne de spins : isotopes He^3 $(\{0\})$ et He^4 $(\{\pm 1\})$



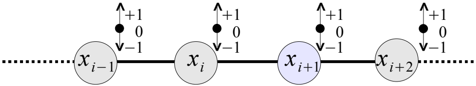
- état $x_i \in \{-1, 0, +1\}$ et $x = \{\ldots, x_{-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots\}$
- énergie totale : $H(x) = \sum_i H_0(x_i, x_{i+1})$ où

$$H_0(x, y) = -Jxy - Kx^2y^2 + \frac{\Delta}{2}(x^2 + y^2)$$

- Modéliser un système à l'équilibre à la température Temp $= \beta^{-1}$

Le modèle de BEG

- Un exemple de chaîne de spins : isotopes He^3 ($\{0\}$) et He^4 ($\{\pm 1\}$)



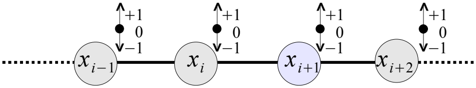
- état $x_i \in \{-1, 0, +1\}$ et $x = \{\ldots, x_{-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots\}$
- énergie totale : $H(x) = \sum_i H_0(x_i, x_{i+1})$ où

$$H_0(x,y) = -Jxy - Kx^2y^2 + \frac{\Delta}{2}(x^2 + y^2)$$

- Modéliser un système à l'équilibre à la température Temp $= \beta^{-1}$

Le modèle de BEG

- Un exemple de chaîne de spins : isotopes He^3 ($\{0\}$) et He^4 ($\{\pm 1\}$)



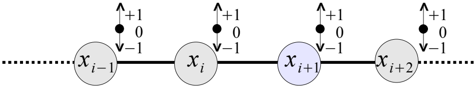
- état $x_i \in \{-1, 0, +1\}$ et $x = \{\dots, x_{-1}, x_i, x_{i+1}, \dots\}$
- énergie totale : $H(x) = \sum_i H_0(x_i, x_{i+1})$ où

$$H_0(x, y) = -Jxy - Kx^2y^2 + \frac{\Delta}{2}(x^2 + y^2)$$

- Modéliser un système à l'équilibre à la température Temp $= \beta^{-1}$

Le modèle de BEG

- Un exemple de chaîne de spins : isotopes He^3 ($\{0\}$) et He^4 ($\{\pm 1\}$)



- état $x_i \in \{-1, 0, +1\}$ et $x = \{\ldots, x_{-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots\}$
- énergie totale : $H(x) = \sum_i H_0(x_i, x_{i+1})$ où

$$H_0(x, y) = -Jxy - Kx^2y^2 + \frac{\Delta}{2}(x^2 + y^2)$$

- Modéliser un système à l'équilibre à la température Temp $= \beta^{-1}$

Distribution de Gibbs en général

- Distribution d'une configuration finie :

$$\mu_\beta([x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n]) = \Phi_\beta(x_m)\frac{\Pi_{i=m}^{n-1}\exp(-\beta H(x_i, x_{i+1}))}{\exp(-\beta(n-m)F_\beta)}\Phi^*_\beta(x_n)$$

- F_β : énergie libre, μ_β chaîne de Markov :

$$\text{loi initiale} = \Phi_\beta(x)\Phi^*_\beta(x) \quad \text{transition} = \frac{\exp(-\beta H_0(x,y))}{\exp(-\beta F_\beta)}\frac{\Phi^*_\beta(y)}{\Phi_\beta(x)}$$

- Un problème aux valeurs propres :

$$M_\beta(x,y) = \exp(-\beta H_0(x,y)) \qquad \begin{aligned}\sum_y M_\beta(x,y)\Phi^*_\beta(y) &= \exp(-\beta F_\beta)\Phi^*_\beta(x)\\ \sum_x \Phi_\beta(x)M_\beta(x,y) &= \exp(-\beta F_\beta)\Phi_\beta(y)\end{aligned}$$

- Dans le cas de BEG : $\mu_\beta \longrightarrow$? lorsque $\beta \longrightarrow +\infty$

Distribution de Gibbs en général

- Distribution d'une configuration finie :

$$\mu_\beta([x_m, x_{m+1}, \dots, x_n]) = \Phi_\beta(x_m)\frac{\Pi_{i=m}^{n-1}\exp(-\beta H(x_i, x_{i+1}))}{\exp(-\beta(n-m)F_\beta)}\Phi^*_\beta(x_n)$$

- F_β : énergie libre, μ_β chaîne de Markov :

$$\text{loi initiale} = \Phi_\beta(x)\Phi^*_\beta(x) \quad \text{transition} = \frac{\exp(-\beta H_0(x,y))}{\exp(-\beta F_\beta)}\frac{\Phi^*_\beta(y)}{\Phi_\beta(x)}$$

- Un problème aux valeurs propres :

$$M_\beta(x,y) = \exp(-\beta H_0(x,y))$$

$$\sum_y M_\beta(x,y)\Phi^*_\beta(y) = \exp(-\beta F_\beta)\Phi^*_\beta(x)$$

$$\sum_x \Phi_\beta(x) M_\beta(x,y) = \exp(-\beta F_\beta)\Phi_\beta(y)$$

- Dans le cas de BEG : $\mu_\beta \longrightarrow$? lorsque $\beta \longrightarrow +\infty$

Distribution de Gibbs en général

- Distribution d'une configuration finie :

$$\mu_\beta([x_m, x_{m+1}, \dots, x_n]) = \Phi_\beta(x_m) \frac{\Pi_{i=m}^{n-1} \exp(-\beta H(x_i, x_{i+1}))}{\exp(-\beta(n-m)F_\beta)} \Phi_\beta^*(x_n)$$

- F_β : énergie libre, μ_β chaîne de Markov :

$$\text{loi initiale} = \Phi_\beta(x)\Phi_\beta^*(x) \quad \text{transition} = \frac{\exp(-\beta H_0(x,y))}{\exp(-\beta F_\beta)} \frac{\Phi_\beta^*(y)}{\Phi_\beta(x)}$$

- Un problème aux valeurs propres :

$$M_\beta(x,y) = \exp(-\beta H_0(x,y))$$

$$\sum_y M_\beta(x,y)\Phi_\beta^*(y) = \exp(-\beta F_\beta)\Phi_\beta^*(x)$$

$$\sum_x \Phi_\beta(x) M_\beta(x,y) = \exp(-\beta F_\beta)\Phi_\beta(y)$$

- Dans le cas de BEG : $\mu_\beta \to$? lorsque $\beta \to +\infty$

Distribution de Gibbs en général

- Distribution d'une configuration finie :

$$\mu_\beta([x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n]) = \Phi_\beta(x_m) \frac{\Pi_{i=m}^{n-1} \exp(-\beta H(x_i, x_{i+1}))}{\exp(-\beta(n-m)F_\beta)} \Phi_\beta^*(x_n)$$

- F_β : énergie libre, μ_β chaîne de Markov :

$$\text{loi initiale} = \Phi_\beta(x)\Phi_\beta^*(x) \quad \text{transition} = \frac{\exp(-\beta H_0(x,y))}{\exp(-\beta F_\beta)} \frac{\Phi_\beta^*(y)}{\Phi_\beta(x)}$$

- Un problème aux valeurs propres :

$$M_\beta(x,y) = \exp(-\beta H_0(x,y)) \qquad \begin{aligned} \sum_y M_\beta(x,y)\Phi_\beta^*(y) &= \exp(-\beta F_\beta)\Phi_\beta^*(x) \\ \sum_x \Phi_\beta(x) M_\beta(x,y) &= \exp(-\beta F_\beta)\Phi_\beta(y) \end{aligned}$$

- Dans le cas de BEG : $\mu_\beta \to$? lorsque $\beta \to +\infty$

Distribution de Gibbs en général

- Distribution d'une configuration finie :

$$\mu_\beta([x_m, x_{m+1}, \dots, x_n]) = \Phi_\beta(x_m) \frac{\Pi_{i=m}^{n-1} \exp(-\beta H(x_i, x_{i+1}))}{\exp(-\beta(n-m)F_\beta)} \Phi^*_\beta(x_n)$$

- F_β : énergie libre, μ_β chaîne de Markov :

$$\text{loi initiale} = \Phi_\beta(x)\Phi^*_\beta(x) \quad \text{transition} = \frac{\exp(-\beta H_0(x,y))}{\exp(-\beta F_\beta)} \frac{\Phi^*_\beta(y)}{\Phi_\beta(x)}$$

- Un problème aux valeurs propres :

$$M_\beta(x,y) = \exp(-\beta H_0(x,y)) \qquad \begin{aligned} \sum_y M_\beta(x,y)\Phi^*_\beta(y) &= \exp(-\beta F_\beta)\Phi^*_\beta(x) \\ \sum_x \Phi_\beta(x) M_\beta(x,y) &= \exp(-\beta F_\beta)\Phi_\beta(y) \end{aligned}$$

- Dans le cas de BEG : $\mu_\beta \to$? lorsque $\beta \to +\infty$

Distribution de Gibbs pour BEG

- $\epsilon = e^{-\beta}, \qquad M_\epsilon(x,y) = A(x,y)\epsilon^{a(x,y)},$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad a = \begin{bmatrix} -J-K+\Delta & \frac{1}{2}\Delta & J-K+\Delta \\ \frac{1}{2}\Delta & 0 & \frac{1}{2}\Delta \\ J-K+\Delta & \frac{1}{2}\Delta & -J-K+\Delta \end{bmatrix}$$

- Graphe pondéré de transition :

Cycles minimisants de $a(x,y)$

cycles d'order 1	0, $(-J-K+\Delta)$
cycles d'order 2	$\frac{1}{2}\Delta$, $(J-K+\Delta)$
cycles d'order 3	$\frac{1}{3}(J-K+2\Delta)$

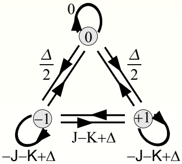
- Lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$, vers quoi converge la distribution μ_ϵ de Gibbs ?

Distribution de Gibbs pour BEG

- $\epsilon = e^{-\beta}, \qquad M_\epsilon(x,y) = A(x,y)\epsilon^{a(x,y)},$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad a = \begin{bmatrix} -J-K+\Delta & \frac{1}{2}\Delta & J-K+\Delta \\ \frac{1}{2}\Delta & 0 & \frac{1}{2}\Delta \\ J-K+\Delta & \frac{1}{2}\Delta & -J-K+\Delta \end{bmatrix}$$

- Graphe pondéré de transition :



Cycles minimisants de $a(x,y)$

cycles d'order 1	$0,\ (-J-K+\Delta)$
cycles d'order 2	$\frac{1}{2}\Delta,\ (J-K+\Delta)$
cycles d'order 3	$\frac{1}{3}(J-K+2\Delta)$

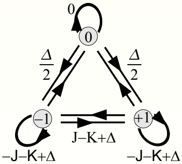
- Lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$, vers quoi converge la distribution μ_ϵ de Gibbs ?

Distribution de Gibbs pour BEG

- $\epsilon = e^{-\beta}, \qquad M_\epsilon(x,y) = A(x,y)\epsilon^{a(x,y)},$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad a = \begin{bmatrix} -J-K+\Delta & \frac{1}{2}\Delta & J-K+\Delta \\ \frac{1}{2}\Delta & 0 & \frac{1}{2}\Delta \\ J-K+\Delta & \frac{1}{2}\Delta & -J-K+\Delta \end{bmatrix}$$

- Graphe pondéré de transition :



Cycles minimisants de $a(x,y)$

cycles d'order 1	$0,\ (-J-K+\Delta)$
cycles d'order 2	$\frac{1}{2}\Delta,\ (J-K+\Delta)$
cycles d'order 3	$\frac{1}{3}(J-K+2\Delta)$

- Lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$, vers quoi converge la distribution μ_ϵ de Gibbs ?

Diagramme de phase de BEG à temperature zéro : $\Delta > 0$

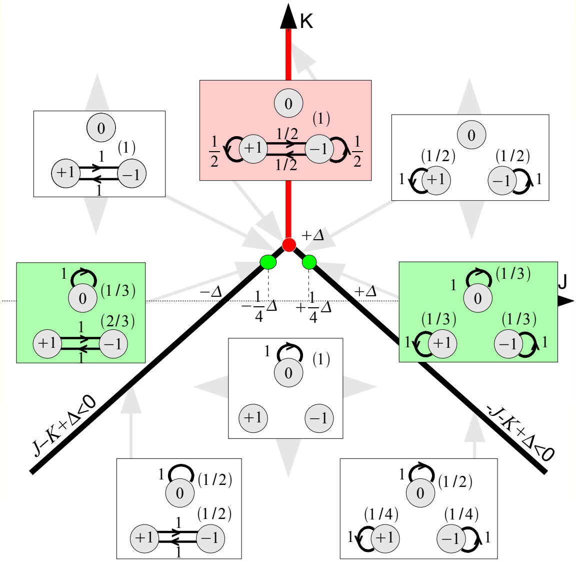
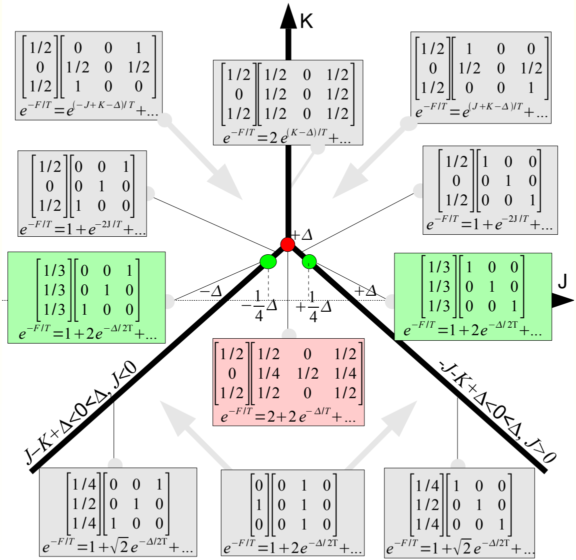


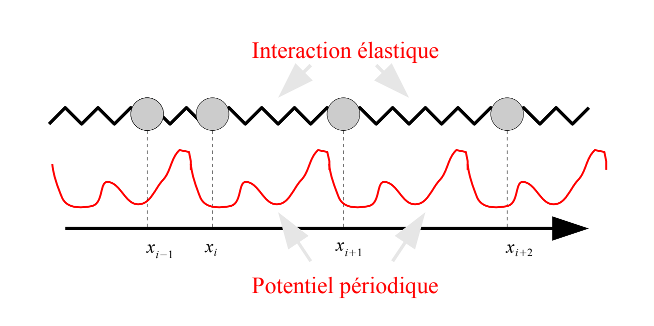
Diagramme de phase de BEG à temperature zéro : $\Delta > 0$



Exemple de systèmes dynamiques couplés : Frenkel-Kontorova

Le modèle Frenkel-Kontorova 1D

- Une chaîne de particules rangées linéairement : $x_i \in \mathbb{R}$ position

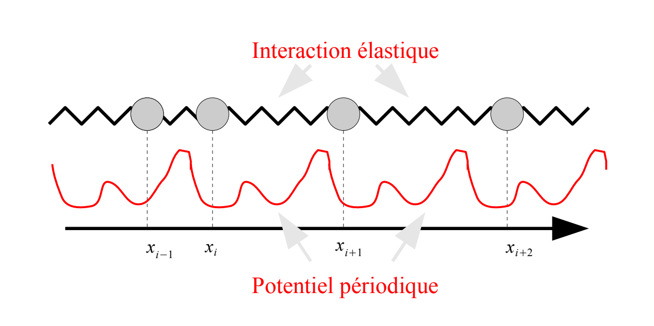


- Energie totale : $H(x, \dot{x}) = \sum_i H_0(x_i, x_{i+1}) + \frac{1}{2}\dot{x}_i^2$

$$H_0(x,y) = \frac{1}{2}|y-x-\gamma|^2 + \frac{K}{(2\pi)^2}(1-\cos(2\pi x)) = W(y-x-\gamma) + KV(x)$$

Le modèle Frenkel-Kontorova 1D

- Une chaîne de particules rangées linéairement : $x_i \in \mathbb{R}$ position



- Energie totale : $H(x, \dot{x}) = \sum_i H_0(x_i, x_{i+1}) + \frac{1}{2}\dot{x}_i^2$

$$H_0(x,y) = \frac{1}{2}|y-x-\gamma|^2 + \frac{K}{(2\pi)^2}(1-\cos(2\pi x)) = W(y-x-\gamma) + KV(x)$$

Dynamique hamiltonienne couplée

- Formalisme hamiltonien de la mécanique :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = -J\nabla H(x,\dot{x}) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_i & = \dfrac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x}) \\ \dfrac{d}{dt}\dot{x}_i & = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(x,\dot{x}) \end{cases}$$

- Distribution de Gibbs μ_β à température β^{-1} : chaîne de Markov

$$\int e^{-\beta H_0(x,y)}\Phi^*(y)\,dy = \lambda_\beta \Phi^*(x)$$

$$\int \Phi(x) e^{-\beta H_0(x,y)}\,dx = \lambda_\beta \Phi(y)$$

- Question : quels sont les états fondamentaux $\lim_{\beta\to+\infty}\mu_\beta = ?$

Dynamique hamiltonienne couplée

- Formalisme hamiltonien de la mécanique :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = -J\nabla H(x,\dot{x}) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_i &= \dfrac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x}) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dot{x}_i &= -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(x,\dot{x}) \end{cases}$$

- Distribution de Gibbs μ_β à température β^{-1} : chaîne de Markov

$$\int e^{-\beta H_0(x,y)}\Phi^*(y)\,dy = \lambda_\beta \Phi^*(x)$$

$$\int \Phi(x) e^{-\beta H_0(x,y)}\,dx = \lambda_\beta \Phi(y)$$

- Question : quels sont les états fondamentaux $\lim_{\beta\to+\infty}\mu_\beta = ?$

Dynamique hamiltonienne couplée

- Formalisme hamiltonien de la mécanique :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = -J\nabla H(x,\dot{x}) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_i &= \dfrac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x}) \\ \dfrac{d}{dt}\dot{x}_i &= -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(x,\dot{x}) \end{cases}$$

- Distribution de Gibbs μ_β à température β^{-1} : chaîne de Markov

$$\int e^{-\beta H_0(x,y)}\Phi^*(y)\,dy = \lambda_\beta \Phi^*(x)$$

$$\int \Phi(x)e^{-\beta H_0(x,y)}\,dx = \lambda_\beta \Phi(y)$$

- Question : quels sont les états fondamentaux $\lim_{\beta\to+\infty}\mu_\beta = ?$

Discrétisation du modèle FK

- Réponse partielle :
  - Dans le cas général, on ne sait presque rien
  - Génériquement, la limite est unique (un cycle périodique ?)
  - En discrétisant, la limite existe et est unique
  - Il manque un réel algorithme pour déterminer la limite
- Problème de discrétisation classique

$$x_k = \frac{k}{N} \quad H_0(x_k, x_l) = \frac{1}{2}|x_l - x_k - \gamma|^2 + KV(x_k)$$

- Discrétisation de la mesure de Gibbs : $\longrightarrow$ BEG

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \qquad \sum_k e^{-\beta u_\beta(x_k)} e^{-\beta H_0(x_k,x_l)} = e^{-\beta \bar{H}_\beta} e^{-\beta u_\beta(x_l)}$$

- Problème de type minplus ou tropical

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_\beta(x) & \to & u(x) \\ \bar{H}_\beta & \to & \bar{H} \end{array} \right. , \qquad \min_k \left\{ u(x_k) + H_0(x_k, x_l) \right\} = \bar{H} + u(x_l)$$

(problème dual de l'équation de la cellule dans HJ : $\bar{H}$: hamiltonien effectif)

Discrétisation du modèle FK

- Réponse partielle :
  - Dans le cas général, on ne sait presque rien
  - Génériquement, la limite est unique (un cycle périodique ?)
  - En discrétisant, la limite existe et est unique
  - Il manque un réel algorithme pour déterminer la limite
- Problème de discrétisation classique

$$x_k = \frac{k}{N} \quad H_0(x_k, x_l) = \frac{1}{2}|x_l - x_k - \gamma|^2 + KV(x_k)$$

- Discrétisation de la mesure de Gibbs : $\longrightarrow$ BEG

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \qquad \sum_k e^{-\beta u_\beta(x_k)} e^{-\beta H_0(x_k, x_l)} = e^{-\beta \bar{H}_\beta} e^{-\beta u_\beta(x_l)}$$

- Problème de type minplus ou tropical

$$\begin{cases} u_\beta(x) & \to & u(x) \\ \bar{H}_\beta & \to & \bar{H} \end{cases}, \qquad \min_k \{u(x_k) + H_0(x_k, x_l)\} = \bar{H} + u(x_l)$$

(problème dual de l'équation de la cellule dans HJ : $\bar{H}$: hamiltonien effectif)

Discrétisation du modèle FK

- Réponse partielle :
  - Dans le cas général, on ne sait presque rien
  - Génériquement, la limite est unique (un cycle périodique ?)
  - En discrétisant, la limite existe et est unique
  - Il manque un réel algorithme pour déterminer la limite
- Problème de discrétisation classique

$$x_k = \frac{k}{N} \quad H_0(x_k, x_l) = \frac{1}{2}|x_l - x_k - \gamma|^2 + KV(x_k)$$

- Discrétisation de la mesure de Gibbs : $\longrightarrow$ BEG

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \qquad \sum_k e^{-\beta u_\beta(x_k)} e^{-\beta H_0(x_k, x_l)} = e^{-\beta \bar{H}_\beta} e^{-\beta u_\beta(x_l)}$$

- Problème de type minplus ou tropical

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_\beta(x) & \to & u(x) \\ \bar{H}_\beta & \to & \bar{H} \end{array} \right. , \qquad \min_k \left\{ u(x_k) + H_0(x_k, x_l) \right\} = \bar{H} + u(x_l)$$

(problème dual de l'équation de la cellule dans HJ : $\bar{H}$: hamiltonien effectif)

Discrétisation du modèle FK

- Réponse partielle :
  - Dans le cas général, on ne sait presque rien
  - Génériquement, la limite est unique (un cycle périodique ?)
  - En discrétisant, la limite existe et est unique
  - Il manque un réel algorithme pour déterminer la limite
- Problème de discrétisation classique

$$x_k = \frac{k}{N} \quad H_0(x_k, x_l) = \frac{1}{2}|x_l - x_k - \gamma|^2 + KV(x_k)$$

- Discrétisation de la mesure de Gibbs : $\longrightarrow$ BEG

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \qquad \sum_k e^{-\beta u_\beta(x_k)} e^{-\beta H_0(x_k, x_l)} = e^{-\beta \bar{H}_\beta} e^{-\beta u_\beta(x_l)}$$

- Problème de type minplus ou tropical

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_\beta(x) & \rightarrow & u(x) \\ \bar{H}_\beta & \rightarrow & \bar{H} \end{array} \right. , \qquad \min_k \left\{ u(x_k) + H_0(x_k, x_l) \right\} = \bar{H} + u(x_l)$$

(problème dual de l'équation de la cellule dans HJ : $\bar{H}$: hamiltonien effectif)

Discrétisation du modèle FK

- Réponse partielle :
  - Dans le cas général, on ne sait presque rien
  - Génériquement, la limite est unique (un cycle périodique ?)
  - En discrétisant, la limite existe et est unique
  - Il manque un réel algorithme pour déterminer la limite
- Problème de discrétisation classique

$$x_k = \frac{k}{N} \qquad H_0(x_k, x_l) = \frac{1}{2}|x_l - x_k - \gamma|^2 + KV(x_k)$$

- Discrétisation de la mesure de Gibbs : $\longrightarrow$ BEG

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \qquad \sum_k e^{-\beta u_\beta(x_k)} e^{-\beta H_0(x_k, x_l)} = e^{-\beta \bar{H}_\beta} e^{-\beta u_\beta(x_l)}$$

- Problème de type minplus ou tropical

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_\beta(x) & \rightarrow & u(x) \\ \bar{H}_\beta & \rightarrow & \bar{H} \end{array} \right. , \qquad \min_k \{u(x_k) + H_0(x_k, x_l)\} = \bar{H} + u(x_l)$$

(problème dual de l'équation de la cellule dans HJ : $\bar{H}$: hamiltonien effectif)

Discrétisation du modèle FK

- Réponse partielle :
  - Dans le cas général, on ne sait presque rien
  - Génériquement, la limite est unique (un cycle périodique ?)
  - En discrétisant, la limite existe et est unique
  - Il manque un réel algorithme pour déterminer la limite
- Problème de discrétisation classique

$$x_k = \frac{k}{N} \quad H_0(x_k, x_l) = \frac{1}{2}|x_l - x_k - \gamma|^2 + KV(x_k)$$

- Discrétisation de la mesure de Gibbs : $\longrightarrow$ BEG

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \qquad \sum_k e^{-\beta u_\beta(x_k)} e^{-\beta H_0(x_k,x_l)} = e^{-\beta \bar{H}_\beta} e^{-\beta u_\beta(x_l)}$$

- Problème de type minplus ou tropical

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_\beta(x) & \to & u(x) \\ \bar{H}_\beta & \to & \bar{H} \end{array} \right., \qquad \min_k \{u(x_k) + H_0(x_k, x_l)\} = \bar{H} + u(x_l)$$

(problème dual de l'équation de la cellule dans HJ : $\bar{H}$: hamiltonien effectif)

Discrétisation du modèle FK

- Réponse partielle :
  - Dans le cas général, on ne sait presque rien
  - Génériquement, la limite est unique (un cycle périodique ?)
  - En discrétisant, la limite existe et est unique
  - Il manque un réel algorithme pour déterminer la limite
- Problème de discrétisation classique

$$x_k = \frac{k}{N} \quad H_0(x_k, x_l) = \frac{1}{2}|x_l - x_k - \gamma|^2 + KV(x_k)$$

- Discrétisation de la mesure de Gibbs : $\longrightarrow$ BEG

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \qquad \sum_k e^{-\beta u_\beta(x_k)} e^{-\beta H_0(x_k,x_l)} = e^{-\beta \bar{H}_\beta} e^{-\beta u_\beta(x_l)}$$

- Problème de type minplus ou tropical

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_\beta(x) & \to & u(x) \\ \bar{H}_\beta & \to & \bar{H} \end{array} \right. , \qquad \min_k \left\{ u(x_k) + H_0(x_k, x_l) \right\} = \bar{H} + u(x_l)$$

(problème dual de l'équation de la cellule dans HJ : $\bar{H}$: hamiltonien effectif)

Discrétisation du modèle FK

- Réponse partielle :
  - Dans le cas général, on ne sait presque rien
  - Génériquement, la limite est unique (un cycle périodique ?)
  - En discrétisant, la limite existe et est unique
  - Il manque un réel algorithme pour déterminer la limite
- Problème de discrétisation classique

$$x_k = \frac{k}{N} \quad H_0(x_k, x_l) = \frac{1}{2}|x_l - x_k - \gamma|^2 + KV(x_k)$$

- Discrétisation de la mesure de Gibbs : $\longrightarrow$ BEG

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \qquad \sum_k e^{-\beta u_\beta(x_k)} e^{-\beta H_0(x_k,x_l)} = e^{-\beta \bar{H}_\beta} e^{-\beta u_\beta(x_l)}$$

- Problème de type minplus ou tropical

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_\beta(x) & \to & u(x) \\ \bar{H}_\beta & \to & \bar{H} \end{array} \right. , \qquad \min_k \left\{ u(x_k) + H_0(x_k, x_l) \right\} = \bar{H} + u(x_l)$$

(problème dual de l'équation de la cellule dans HJ : $\bar{H}$: hamiltonien effectif)

Diagramme de phase de FK

- Diagramme de phase : paramètre d'ordre

$$\text{nombre de rotation : } \omega = \frac{p}{q} = \frac{\text{nombre de puits du potentiel } V}{\text{période du cycle minimisant}}$$

- Numériquement :

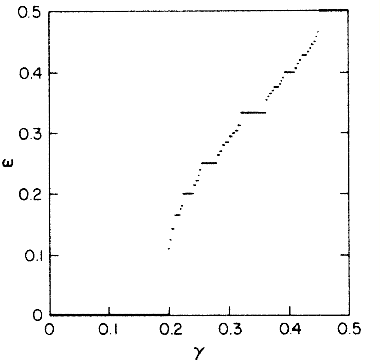
Diagramme de phase de FK

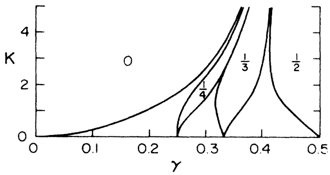
- Diagramme de phase : paramètre d'ordre

$$\text{nombre de rotation : } \omega = \frac{p}{q} = \frac{\text{nombre de puits du potentiel } V}{\text{période du cycle minimisant}}$$

- Numériquement :

$K = 3$



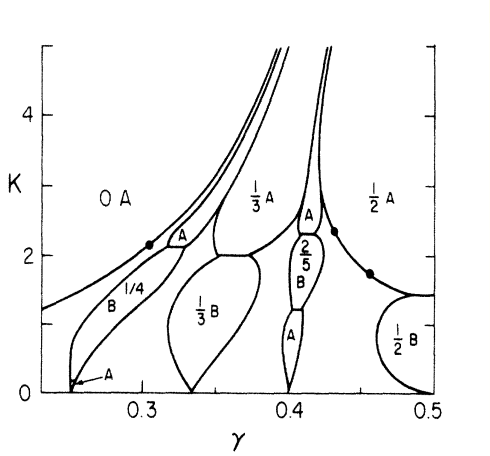


blocage des cycles minimisants

aux nombre de rotation $\mathbb{Q}$

Frenkel-Kontorova généralisé

$\epsilon = 0.1$



$$H_0(x,y) = \frac{1}{2}|y - x - \gamma|^2 + \frac{K}{(2\pi)^2}\Big(1 - \cos(2\pi x) + \epsilon(1 - \cos(4\pi x))\Big)$$

Recherche d'un algorithme effectif description sur un exemple

Le problème dans sa généralité

- Problème de paramétrisation de valeurs propres

$$M = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}, \quad MV = \lambda V,$$

Peut-on trouver $\lambda_k = \lambda_i(X_{ij})$, $k = 1, 2, 3$?

- Cas d'une indéterminée $X_{ij} \in \mathbb{C}\{\{Z\}\}$:

- Cas du corps

$$\mathbb{K} = \left\{ \sum_n A_n \epsilon^{a_n} \ : \ \{a_n\}_n \text{ suite croisante} \to +\infty \text{ et } A_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Le problème dans sa généralité

- Problème de paramétrisation de valeurs propres

$$M = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}, \quad MV = \lambda V,$$

Peut-on trouver $\lambda_k = \lambda_i(X_{ij})$, $k = 1, 2, 3$? Non en général

- Cas d'une indéterminée $X_{ij} \in \mathbb{C}\{\{Z\}\}$:

- Cas du corps

$$\mathbb{K} = \left\{ \sum_n A_n \epsilon^{a_n} \ : \ \{a_n\}_n \text{ suite croisante} \to +\infty \text{ et } A_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Le problème dans sa généralité

- Problème de paramétrisation de valeurs propres

$$M = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}, \quad MV = \lambda V,$$

Peut-on trouver $\lambda_k = \lambda_i(X_{ij})$, $k = 1, 2, 3$? Non en général

- Cas d'une indéterminée $X_{ij} \in \mathbb{C}\{\{Z\}\}$:

- Cas du corps

$$\mathbb{K} = \left\{ \sum_n A_n \epsilon^{a_n} \ : \ \{a_n\}_n \text{ suite croisante} \to +\infty \text{ et } A_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Le problème dans sa généralité

- Problème de paramétrisation de valeurs propres

$$M = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}, \quad MV = \lambda V,$$

Peut-on trouver $\lambda_k = \lambda_i(X_{ij})$, $k = 1, 2, 3$? Non en général

- Cas d'une indéterminée $X_{ij} \in \mathbb{C}\{\{Z\}\}$:

le corps des séries de Laurent convergentes
est algébriquement fermé

L'algorithme de Puiseux fournit les 3 racines

- Cas du corps

$$\mathbb{K} = \left\{ \sum_n A_n \epsilon^{a_n} \ : \ \{a_n\}_n \text{ suite croisante} \to +\infty \text{ et } A_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Le problème dans sa généralité

- Problème de paramétrisation de valeurs propres

$$M = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}, \quad MV = \lambda V,$$

Peut-on trouver $\lambda_k = \lambda_i(X_{ij})$, $k = 1, 2, 3$? Non en général

- Cas d'une indéterminée $X_{ij} \in \mathbb{C}\{\{Z\}\}$:

le corps des séries de Laurent convergentes
est algébriquement fermé

L'algorithme de Puiseux fournit les 3 racines

- Cas du corps

$$\mathbb{K} = \left\{ \sum_n A_n \epsilon^{a_n} \; : \; \{a_n\}_n \text{ suite croisante} \to +\infty \text{ et } A_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Le problème dans sa généralité

- Problème de paramétrisation de valeurs propres

$$M = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}, \quad MV = \lambda V,$$

Peut-on trouver $\lambda_k = \lambda_i(X_{ij})$, $k = 1, 2, 3$? Non en général

- Cas d'une indéterminée $X_{ij} \in \mathbb{C}\{\{Z\}\}$:

le corps des séries de Laurent convergentes
est algébriquement fermé

L'algorithme de Puiseux fournit les 3 racines

- Cas du corps

$$\mathbb{K} = \left\{ \sum_n A_n \epsilon^{a_n} \ : \ \{a_n\}_n \text{ suite croisante} \to +\infty \text{ et } A_n \in \mathbb{C} \right\}$$

$\mathbb{K}$ est algébriquement fermé (Thomas Markwig 2007)

Ebauche sur un exemple

- Exemple en dimension 3 ou 4 (l'algorithme existe)

$$M_\epsilon = \begin{bmatrix} A_{11}\epsilon^{a_{11}} & A_{12}\epsilon^{a_{12}} & A_{13}\epsilon^{a_{13}} \\ A_{21}\epsilon^{a_{21}} & A_{22}\epsilon^{a_{22}} & A_{23}\epsilon^{a_{23}} \\ A_{31}\epsilon^{a_{31}} & A_{32}\epsilon^{a_{32}} & A_{33}\epsilon^{a_{33}} \end{bmatrix}, \quad M_\epsilon V_\epsilon = \lambda_\epsilon V_\epsilon$$

- $D_\epsilon M_\epsilon D_\epsilon^{-1} \quad \longrightarrow \quad$ termes dominant $\in$ les cyles minimisants

$$\min\{u_i + a_{ij}\} = \bar{h} + u_j, \qquad \forall\ j$$

- Un début d'équivalent : $\lambda_\epsilon = \bar{H}\epsilon^{\bar{h}} + \text{termes ordre sup.}$
- Problème : un équivalent de $V_\epsilon(i)/V_\epsilon(j)$ nécessite un développement d'orde supérieur de λ_ϵ

Ebauche sur un exemple

- Exemple en dimension 3 ou 4 (l'algorithme existe)

$$M_\epsilon = \begin{bmatrix} A_{11}\epsilon^{a_{11}} & A_{12}\epsilon^{a_{12}} & A_{13}\epsilon^{a_{13}} \\ A_{21}\epsilon^{a_{21}} & A_{22}\epsilon^{a_{22}} & A_{23}\epsilon^{a_{23}} \\ A_{31}\epsilon^{a_{31}} & A_{32}\epsilon^{a_{32}} & A_{33}\epsilon^{a_{33}} \end{bmatrix}, \quad M_\epsilon V_\epsilon = \lambda_\epsilon V_\epsilon$$

- $D_\epsilon M_\epsilon D_\epsilon^{-1} \quad \longrightarrow$ termes dominant $\in$ les cyles minimisants

$$\min \left\{ u_i + a_{ij} \right\} = \bar{h} + u_j, \qquad \forall\ j$$

- Un début d'équivalent : $\lambda_\epsilon = \bar{H}\epsilon^{\bar{h}} + \text{termes ordre sup.}$
- Problème : un équivalent de $V_\epsilon(i)/V_\epsilon(j)$ nécessite un développement d'orde supérieur de λ_ϵ

Ebauche sur un exemple

- Exemple en dimension 3 ou 4 (l'algorithme existe)

$$M_\epsilon = \begin{bmatrix} A_{11}\epsilon^{a_{11}} & A_{12}\epsilon^{a_{12}} & A_{13}\epsilon^{a_{13}} \\ A_{21}\epsilon^{a_{21}} & A_{22}\epsilon^{a_{22}} & A_{23}\epsilon^{a_{23}} \\ A_{31}\epsilon^{a_{31}} & A_{32}\epsilon^{a_{32}} & A_{33}\epsilon^{a_{33}} \end{bmatrix}, \quad M_\epsilon V_\epsilon = \lambda_\epsilon V_\epsilon$$

- $D_\epsilon M_\epsilon D_\epsilon^{-1} \quad \longrightarrow$ termes dominant $\in$ les cyles minimisants

$$\min \left\{ u_i + a_{ij} \right\} = \bar{h} + u_j, \qquad \forall\ j$$

- Un début d'équivalent : $\lambda_\epsilon = \bar{H}\epsilon^{\bar{h}} + \text{termes ordre sup.}$
- Problème : un équivalent de $V_\epsilon(i)/V_\epsilon(j)$ nécessite un développement d'orde supérieur de λ_ϵ

Ebauche sur un exemple

- Exemple en dimension 3 ou 4 (l'algorithme existe)

$$M_\epsilon = \begin{bmatrix} A_{11}\epsilon^{a_{11}} & A_{12}\epsilon^{a_{12}} & A_{13}\epsilon^{a_{13}} \\ A_{21}\epsilon^{a_{21}} & A_{22}\epsilon^{a_{22}} & A_{23}\epsilon^{a_{23}} \\ A_{31}\epsilon^{a_{31}} & A_{32}\epsilon^{a_{32}} & A_{33}\epsilon^{a_{33}} \end{bmatrix}, \quad M_\epsilon V_\epsilon = \lambda_\epsilon V_\epsilon$$

- $D_\epsilon M_\epsilon D_\epsilon^{-1} \quad \longrightarrow$ termes dominant $\in$ les cyles minimisants

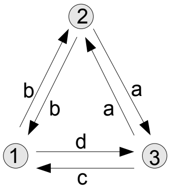
$$\min \left\{ u_i + a_{ij} \right\} = \bar{h} + u_j, \qquad \forall\ j$$

- Un début d'équivalent : $\lambda_\epsilon = \bar{H}\epsilon^{\bar{h}} + \text{termes ordre sup.}$
- Problème : un équivalent de $V_\epsilon(i)/V_\epsilon(j)$ nécessite un développement d'orde supérieur de λ_ϵ

Un exemple explicite

- Retour

$$M_\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^a & \epsilon^b \\ \epsilon^a & 0 & \epsilon^c \\ \epsilon^b & \epsilon^d & 0 \end{bmatrix}$$

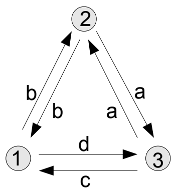


$$d < c$$

Un exemple explicite

- Retour

$$M_\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^a & \epsilon^b \\ \epsilon^a & 0 & \epsilon^c \\ \epsilon^b & \epsilon^d & 0 \end{bmatrix}$$



$d < c$