

Le modèle Frenkel-Kontorova quasi périodique

Philippe Thieullen (Bordeaux)

travail en collaboration avec
E. Garibaldi (Campinas) et S. Petite (Amiens)

Colloquium au

Laboratoire de Mathématiques de
Raphaël Salem

Rouen, le 25 juin 2015

Plan de l'exposé

- I. Introduction au problème de configurations minimisantes
- II. Le modèle de Frenkel-Kontorova périodique
- III. Exemple de modèles quasi périodiques
- IV. Résultats principaux

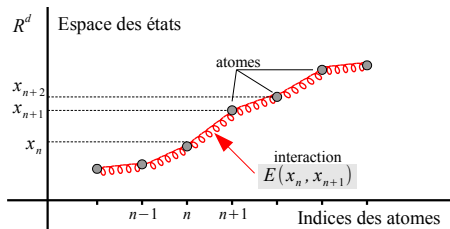
I. Introduction au problème de configurations minimisantes

- 1 Configurations minimisantes
- 2 Energie fondamentale
- 3 Configurations calibrées
- 4 Modélisation d'un environnement
- 5 Hypothèses générales du modèle

1-a. Configurations minimisantes

Notations

- énergie d'interaction : $E(x, y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
- configuration : $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où $x_n \in \mathbb{R}^d$ est la position du n-ième atome



Définition non correcte :

$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est minimisante si :

$$E_{tot} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} E(x_n, x_{n+1})$$

atteint une valeur minimale

Question

- existe-t-il des configurations minimisantes ?
- Quelles sont les propriétés des configurations minimisantes ?

1-b. Configurations minimisantes

Définition Une configuration $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dite minimisante si pour tout bloc fini d'atomes, $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$, d'extrémité fixées, x_m et x_n , l'énergie du bloc ne peut qu'augmenter si on déplace un quelconque atome à l'intérieur :

$$E(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) := \sum_{k=m}^{n-1} E(x_k, x_{k+1})$$

$$E(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \leq E(y_m, y_{m+1}, \dots, y_n)$$

dès que $y_m = x_m$ et $y_n = x_n$

Remarque

- cette définition est similaire à la notion de géodésique minimale
- une configuration minimisante n'est pas vraiment un minimiseur global
- On introduit une notion plus forte : configurations calibrées

2. Energie fondamentale

Une configuration calibrée est une configuration de plus bas niveau d'énergie parmi toutes les configurations minimisantes.

Définition

– énergie fondamentale est la plus petite énergie par site

$$E(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{n-1} E(x_k, x_{k+1})$$

$$\bar{E} := \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{n} E(x_0, \dots, x_n)$$

– la limite existe par super additivité de $\inf_{x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d} E(x_0, \dots, x_n)$

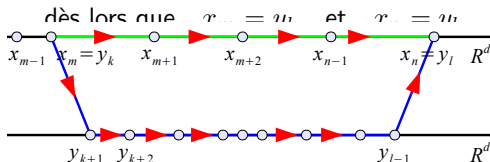
– si l'interaction est coercive : $E(x, y) : \lim_{|y-x| \rightarrow +\infty} E(x, y) = +\infty$

$$\inf_{x, y \in \mathbb{R}^d} E(x, y) \leq \bar{E} \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^d} E(x, x)$$

3. Configurations calibrées

Définition : Une configuration $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dite calibrée (au niveau d'énergie \bar{E}) si, pour tout $m < n$, pour tout $k < l$,

$$E(x_m, \dots, x_n) - (n - m)\bar{E} \leq E(y_k, \dots, y_l) - (l - k)\bar{E}$$



(la différence principale avec *minimisant* est le nombre d'atomes)

En d'autres termes, si on définit la barrière de Mañé

$$S(x, y) = \inf_{n \geq 1} \inf_{x = x_0, \dots, x_n = y} [E(x_0, \dots, x_n) - n\bar{E}]$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est calibrée $\Leftrightarrow E(x_m, \dots, x_n) - (n - m)\bar{E} = S(x_m, x_n)$

Problème Existence et propriétés des configurations calibrées ?

4. Modélisation d'un environnement

Objectif Chercher à représenter une famille d'énergies $E_\omega(x, y)$ qui tient compte de l'environnement dans lequel est plongée la chaîne d'atomes

Notation On appelle interaction entre x, y dans un environnement ω :

$$E_\omega(x, y)$$

Exemple Frenkel-Kontorova 1D périodique

$$E_\omega(x, y) = W(y - x) + V_\omega(x), \quad \omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$W(y - x) = \frac{1}{2}|y - x - \lambda|^2, \quad V_\omega(x) = \frac{K}{(2\pi)^2} \left(1 - \cos 2\pi(x + \omega)\right)$$

Plus généralement On imposera à l'interaction $E_\omega(x, y)$ d'être :

- invariante par translation
- écrite sous forme lagrangienne
- super linéaire (plus fort que coercif)

5. Hypothèses générales du modèle

- Un espace d'environnements (Ω, τ_t) : un flot minimal sur un espace métrique compact, un flot dont toutes les orbites sont denses :

$$\tau_t : \Omega \rightarrow \Omega, \quad t \in \mathbb{R}^d, \quad \tau_{s+t} = \tau_s \circ \tau_t \quad (\text{condition de flot})$$

- Une interaction invariante par translation

$$E_\omega(x+t, y+t) = E_{\tau_t(\omega)}(x, y)$$

- Une interaction écrite sous forme lagrangienne

$$\exists L(\omega, t) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_\omega(x, y) := L(\tau_x(\omega), y - x)$$

- Un lagrangien L, C^0 et super linéaire in t

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\omega \in \Omega} \inf_{\|t\| \geq R} \frac{L(\omega, t)}{\|t\|} = +\infty$$

II. Le modèle de Frenkel-Kontorova périodique

- 1 La théorie d'Aubry
- 2 L'opérateur de Lax-Oleinik
- 3 La théorie de Mather

1-a. La théorie d'Aubry

Frenkel-Kontorova : $d = 1$

$$E_{\omega, \lambda}(x, y) := \frac{1}{2}|y - x - \lambda|^2 + \frac{K}{(2\pi)^2} \left(1 - \cos(2\pi(\omega + x))\right)$$

λ : distance mutuelle entre deux atomes. On rappelle

$$\bar{E}_{\omega}(\lambda) = \text{énergie fondamentale} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \inf_{x_0, \dots, x_n} E_{\omega, \lambda}(x_0, \dots, x_n)$$

Espace des environnements

- $\omega_* = \mathbb{Z}$, $\Omega = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \overline{\{\omega_* + t : t \in \mathbb{R}\}}^{\text{Hausdorff/compact}}$, $\tau_t(\omega) = \omega + t$

- (Ω, τ_t) est minimal et uniquement ergodique

- L'interaction est sous forme lagrangienne

$$E_{\omega, \lambda}(x, y) = L_{\lambda}(\tau_x(\omega), y - x) = W_{\lambda}(y - x) + V_{\omega}(x),$$

$$W_{\lambda}(y - x) = \frac{1}{2}|y - x - \lambda|^2, \quad V_{\omega}(x) = \frac{K}{(2\pi)^2} \left(1 - \cos 2\pi(\omega + x)\right)$$

- Invariance par translation : $E_{\omega, \lambda}(x + t, y + t) = E_{\tau_t(\omega), \lambda}(x, y)$

1-b. La théorie d'Aubry

Rappel Une configuration $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dite minimisante pour ω , si pour toute autre configuration $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, pour tout segment fini d'atomes,

$$[y_m = x_m \text{ et } y_n = x_n] \implies E_{\omega, \lambda}(x_m, \dots, x_n) \leq E_{\omega, \lambda}(y_m, \dots, y_n)$$

Théorème d'Aubry Ici $d = 1$, ω , λ sont fixés

– Toute configuration minimisante admet un nombre de rotation ρ au sens fort : la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est monotone, de plus,

$$\exists R > 0, \quad |x_n - x_0 - n\rho| \leq R \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_0}{n} = \rho \right)$$

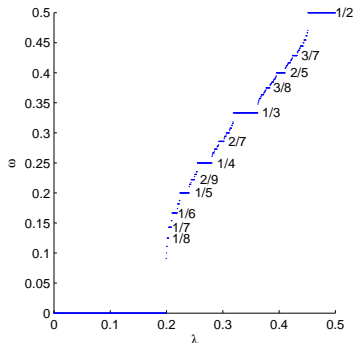
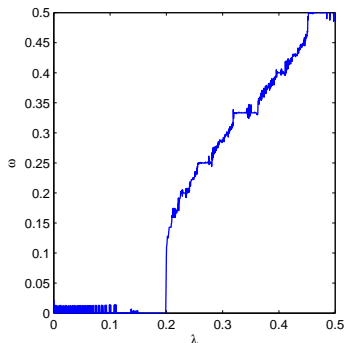
- Tout nombre ρ est nombre de rotation d'une configuration minimisante
- Si $\bar{E}(\lambda)$ est l'énergie fondamentale et si $\rho(\lambda) := -\frac{\partial \bar{E}}{\partial \lambda}(\lambda)$, alors

$$(x_n) \text{ est calibrée pour } \bar{E}(\lambda) \iff (x_n) \text{ est minimisante de nombre de rotation } \rho(\lambda)$$

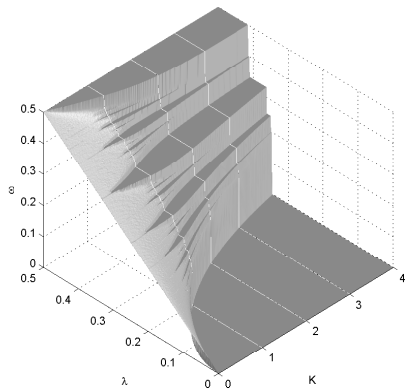
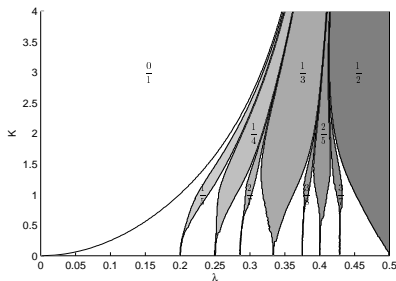
1-c. La théorie d'Aubry

$$E_{\lambda,K}(x,y) = \frac{1}{2}|y-x|^2 - \lambda(y-x) + \frac{K}{(2\pi)^2} \left(1 - \cos(2\pi x)\right)$$

$$\bar{E}(\lambda, K) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \inf_{x_0, \dots, x_n} E_{\lambda,K}(x_0, \dots, x_n), \quad \rho = -\frac{\partial \bar{E}}{\partial \lambda}(\lambda, K), \quad K = 3$$



1-d. La théorie d'Aubry

Diagramme complet en (λ, K) 

2-a. L'opérateur de Lax-Oleinik

L'outil fondamental L'opérateur de Lax-Oleinik. La dimension est quelconque $d \geq 1$. Pour tout u , C^0 -périodique ($E = E_{\omega, \lambda}$)

$$T_- [u](y) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{u(x) + E(x, y)\}$$

remarque : $E(x+1, y+1) = E(x, y) \Rightarrow T_- [u]$ est périodique

Rappel Energie fondamentale $\bar{E} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{x_0, \dots, x_n} \frac{1}{n} E(x_0, \dots, x_n)$

Théorème (Solution d'un problème aux valeurs propres additives)

$$\exists u \in C^0(\mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d, \mathbb{R}), \quad T_- [u] = u + \bar{E}$$

– la valeur propre additive \bar{E} est unique, la fonction propre additive u n'est pas unique. Elle est appelée solution KAM faible discrète

– u vérifie les deux relations

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad E(x, y) \geq u(y) - u(x) + \bar{E}$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^d, \exists (x_{-n})_{n \geq 0}, \quad E(x_{-n-1}, x_{-n}) = u(x_{-n}) - u(x_{-n-1}) + \bar{E}$$

2-b. L'opérateur de Lax-Oleinik

Conséquence de : u est solution de l'équation $T_-[u] = u + \bar{E}$

Il existe des configurations u -calibrées bi-infinies $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ au niveau \bar{E}
(donc calibrées au sens de la barrière de Mañé)

$$\begin{aligned} E(x_m, \dots, x_n) &= u(x_n) - u(x_m) + (n - m)\bar{E} \\ E(y_k, \dots, y_l) &\geq u(y_l) - u(y_k) + (l - k)\bar{E}, \quad \forall (y_n)_n \end{aligned}$$

u -calibrée \implies calibrée (classique) : en effet, $\forall x_m = y_k$ et $x_n = y_l$

$$E(x_m, \dots, x_n) - (n - m)\bar{E} = u(x_n) - u(x_m) \leq E(y_k, \dots, y_l) - (l - k)\bar{E}$$

En termes de barrière de Mañé :

$$S(x_m, x_n) = \inf_{k \geq 1} \inf_{x_m = z_0, \dots, z_k = x_n} [E(z_0, \dots, z_k) - k\bar{E}] = u(x_n) - u(x_m)$$

Le problème principal en quasi périodique

– On ne sait pas résoudre l'équation de Lax-Oleinik dans le cadre quasi périodique ! Mais la barrière de Mañé est bien définie.

– Une autre approche duale existe : l'approche de Mather

3-a. La théorie de Mather

Notations $E(x, y)$ est $C^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, super-linéaire, périodique, sous forme lagrangienne $E(x, y) = L(x, y - x)$ et twist

$\forall k \in \mathbb{Z}^d$, $L(x + k, v) = L(x, v)$ et $\left[\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x, y) \right]$ est définie positive

Observation Une configuration minimisante $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ doit être critique

$$E(x_{n-1}, x_n) + E(x_n, x_{n+1}) \leq E(x_{n-1}, y_n) + E(y_n, x_{n+1})$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}(x_{n-1}, x_n) + \frac{\partial E}{\partial x}(x_n, x_{n+1}) = 0$$

Définition L'application twist \Leftrightarrow flot discret d'Euler-Lagrange

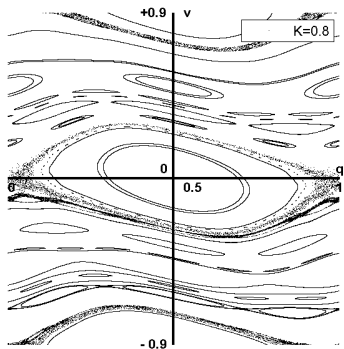
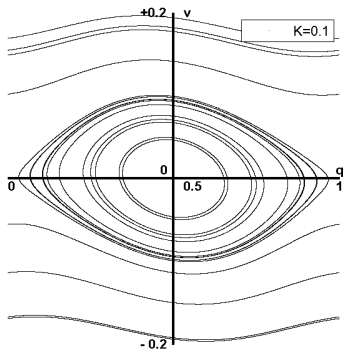
$$\Phi_{EL} := \begin{cases} \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \\ (x_{n-1}, v_{n-1} = x_n - x_{n-1}) & \mapsto (x_n, v_n = x_{n+1} - x_n) \end{cases}$$

Conclusion $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est critique $\Leftrightarrow (x_n, v_n) = \Phi_{EL}^n(x_0, v_0)$

3-b. La théorie de Mather

Cas FK périodique classique application de Taylor-Chirikov

$$\Phi_{EL}(q, v) = (q + v, v + V'(q + v)) \quad \text{où} \quad V'(q) = \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi q)$$



cercles

invariants \neq supports de configurations minimisantes

3-c. La théorie de Mather

Observation de Mather Si $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est minimisante

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{(x_k, x_{k+1} - x_k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\Phi_{EL}^k(x_0, v_0)} \quad \text{dans } \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$$

définit une mesure de probabilité presque invariante par Φ_{EL} .

– Si de plus $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est u -calibrée

$$E(x_n, x_{n+1}) = u(x_{n+1}) - u(x_n) + \bar{E}$$

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L(x, v) d\mu_n(x, v) = \frac{1}{n} E(x_0, \dots, x_n) = \bar{E} + \frac{u(x_n) - u(x_0)}{n} \rightarrow \bar{E}$$

Définition Une mesure de probabilité μ est dite minimisante si

- μ est invariante par Φ_{EL}
- $\int L(x, v) d\mu \leq \int L(x, v) d\nu, \quad \forall \nu$ probabilité Φ_{EL} -invariante

3-c. La théorie de Mather

Proposition Dans le cas d'un modèle périodique, d quelconque

$$\bar{E} = \inf \left\{ \int L(x, v) d\mu : \mu \text{ } \Phi_{EL}\text{-invariante} \right\}$$

Définition On appelle ensemble de Mather

$$\text{Mather}(L) = \cup \left\{ \text{supp}(\mu) : \mu \text{ } \Phi_{EL}\text{-minimisante} \right\}$$

Proposition – L'ensemble de Mather est un graphe au dessus de \mathbb{T} .

– Si $(x_0, v_0) \in \text{Mather}(L)$ et $(x_n, v_n) = \Phi_{EL}^n(x_0, v_0)$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est calibrée. (La réciproque est faux.)

En effet, la relation $T_-[u] \geq u + \bar{E}$, en posant $U(x, v) = u(x)$ est équivalent à

$$L(x, v) \geq U \circ \Phi_{EL}(x, v) - U(x, v) + \bar{E}$$

$$E(x, x + v) = L(x, v) = U \circ \Phi_{EL}(x, v) - U(x, v) + \bar{E} \quad \text{sur } \text{Mather}(L)$$

III. Modèles quasi périodiques au sens de Delone

- ① Un modèle de type Bohr (non Delone)
- ② Un modèle de type Sturmien ou Fibonacci (Delone)
- ③ Un modèle général de type Delone
- ④ Un modèle de type quasi cristal (Delone)
- ⑤ Résumé des deux modèles (Bohr ou Delone)

1 Un modèle de type Bohr

Exemple Le modèle Frenkel-Kontorova quasi périodique

$$E_\omega(x, y) = \frac{1}{2}|y - x - \lambda|^2 + K_1 \left(1 - \cos(\omega_1 + x)\right) + K_2 \left(1 - \cos(\omega_2 + x\sqrt{2})\right)$$

$$-\Omega = \mathbb{T}^2 \quad \tau_t(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 + t\mathbf{1}, \omega_2 + t\sqrt{2})$$

$$E_\omega(x + t, y + t) = E_{\tau_t(\omega)}(x, y), \quad (\text{invariance par translation})$$

– (Ω, τ_t) est minimal uniquement ergodique

– L'interaction est sous forme lagrangienne

$$L(\omega, t) = \frac{|t - \lambda|^2}{2} + K_1 \left(1 - \cos \omega_1\right) + K_2 \left(1 - \cos \omega_2\right)$$

– L vérifie la condition twist : $\frac{\partial^2 E_\omega}{\partial x \partial y} < 0$

Mais L n'est pas localement transversalement constant

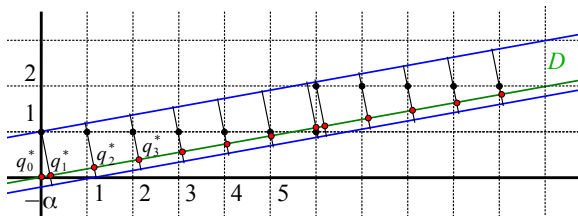
Sinon, il existerait $R > 0$ et une famille finie $\{V_i(x)\}_{i=1}^N$ telle que

$$\forall I_0 = [x_0 - R, x_0 + R], \exists t_0 \in I_0, \exists i, \forall x \in I_0, V_\omega(x) = V_i(x - t_0)$$

2.a Un modèle de type Sturmien

Construction Un modèle de type « coupe et projection » :

- on choisit $\alpha \notin \mathbb{Q}$
- on choisit une bande $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x - \alpha < y \leq \alpha x + 1\}$
- on construit une suite de points $(q_n \vec{u})_{n \geq 0}$ sur la droite $\mathcal{D} = \mathbb{R} \vec{u}$, $\vec{u} = (1, \alpha)$, en projetant les points entiers orthogonalement sur \mathcal{D}



- les distances successives forment un ensemble fini

$$q_{n+1}^* - q_n^* \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right\} = \{L, S\}$$

Cas particulier For $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, on obtient la substitution de Fibonacci

$$S \longrightarrow L \quad \text{et} \quad L \longrightarrow LS$$

2.b Un modèle de type Sturmien

Définition On obtient ainsi un germe : un sous ensemble discret et ordonné de \mathbb{R} , $\omega_* = \{q_n^* : n \geq 0\}$, de complexité finie, pour tout n , $q_{n+1}^* - q_n^* \in \{L, S\}$ avec $0 < S < L$

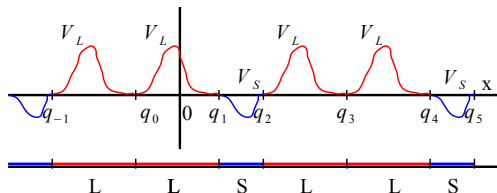
Exemple d'interaction

– ω une valeur d'adhérence par translation à gauche de ω^*

$$\forall R > 0, \exists t_n \rightarrow +\infty,]-R, +R[\cap \omega =]-R, +R[\cap (\omega^* - t_n)$$

$$- E_\omega(x, y) = \frac{1}{2}|y - x - \lambda|^2 + V_\omega(x)$$

$$V_\omega(x) = \begin{cases} V_L(x - q_n) & q_{n+1} - q_n = L \\ V_S(x - q_n) & q_{n+1} - q_n = S \end{cases} \quad \text{si } q_n(\omega) \leq x < q_{n+1}(\omega)$$



On choisit deux fonctions

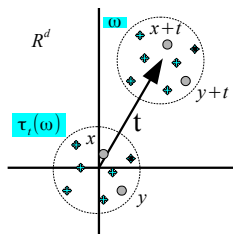
$$V_L : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V_S : [0, S] \rightarrow \mathbb{R}$$

3-a. Un modèle général de type Delone

Environment : Plus généralement, un ensemble de Delone ω^* est une partie de \mathbb{R}^d qui est uniformément discrète et relativement dense

- il existe $R > 0$ tel que $\{B(q, R)\}_{q \in \omega^*}$ sont deux à deux disjoints
- il existe $R' > 0$ tel que $B(x, R') \cap \omega^* \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$



Invariance par translation

L'interaction $E_{\omega^*}(x, y)$ dépend de la position relative des atomes x, y et de l'environnement ω

$$E_{\omega^*}(x + t, y + t) = E_{\tau_t(\omega^*)}(x, y)$$

Ici $\tau_t(\omega^*) = \omega^* - t$ est vu comme une translation dans \mathbb{R}^d

Enveloppe d'un germe

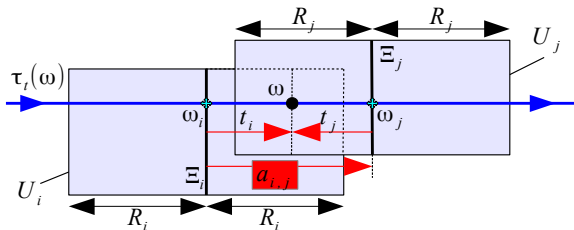
$$\Omega = \overline{\{\tau_t(\omega^*) : t \in \mathbb{R}^d\}}^{\text{Hausdorff/compact}}$$

3-b. Un modèle général de type Delone

Définition : On appelle atlas de boîtes de flot, un recouvrement par des ouverts : $U_i = \tau_i[B_{R_i} \times \Xi_i] = \{\tau_t(\omega) : \|t\| < R_i \text{ et } \omega \in \Xi_i\}$

- Ξ_i est un clopen transverse au flot
- B_{R_i} est une boule ouverte de \mathbb{R}^d de centre 0 et de rayon R_i
- $\tau_i : B_{R_i} \times \Xi_i \rightarrow U_i$ est un homéomorphisme sur son image
- $\{U_i\}_i$ sont compatibles au sens suivant

$$\forall \omega \in U_i \cap U_j, \exists a_{i,j} \in \mathbb{R}^d, [\omega = \tau_{t_i}(\omega_i) = \tau_{t_j}(\omega_j) \Rightarrow t_i - t_j = a_{i,j}]$$



Proposition L'enveloppe d'un Delone admet un atlas de boîtes de flot

3-c. Un modèle général de type Delone

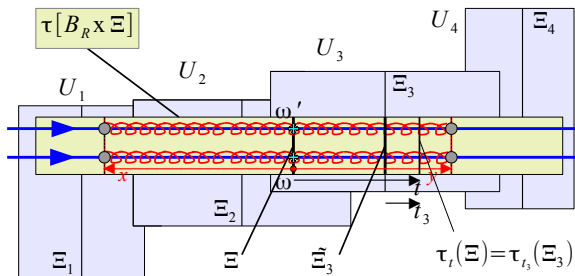
Définition $L : \Omega \times \mathbb{R}^d$ est dit localement transversalement constant si

- il existe un atlas de boîtes de flot compatibles $\{U_i\}_i$
- pour toute boîte de flot $\tau[B_R \times \Xi]$ compatible avec l'atlas,

$$\forall \|t\| < R, \exists i, \exists \|t_i\| < R_i, \exists \tilde{\Xi}_i \subset \Xi_i, \tau_t(\Xi) = \tau_{t_i}(\tilde{\Xi}_i)$$

for any $\omega, \omega' \in \Xi$ et $\|x\|, \|y\| < R$, we have

$$E_\omega(x, y) = E_{\omega'}(x, y) \iff L(\tau_x(\omega), y - x) = L(\tau_x(\omega'), y - x)$$



4-a. Un quasi cristal

Définition Un germe de Delone $\omega_* \subset \mathbb{R}$ est dit de complexité finie si

$$\omega_* = \{q_0^*, q_1^*, \dots\}, \quad q_{n+1}^* - q_n^* \in \{L_1, \dots, L_r\}$$

Notations

- le mot infini : $w_0^\infty = L_{i_1} L_{i_2} \dots$ où $L_{i_n} = q_n - q_{n-1}$
- sous mot fini : $w_m^n = L_{i_{m+1}} L_{i_{m+2}} \dots L_{i_{m+n}}$

Définition

- un germe est dit répétitif si tout sous mot w_m^n de w_0^∞ est relativement dense :

$$\{k \in \mathbb{N} : w_k^n = w_m^n\} \text{ relativement dense dans } \mathbb{N}$$

- un germe est dit uniformément distribué si pour tout sous mot w_m^n

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{Card}\{x \leq k < x + R : w_k^n = w_m^n\}$$

existe uniformément en x

4-b. Un quasi cristal

Définition principale un quasi cristal ω_* est un ensemble de Delone de complexité finie, répétitif et uniformément distribué.

Une suite sturmienne est un quasi cristal

Enveloppe d'un quasi cristal L'ensemble

$$\Omega = \{ \omega \subset \mathbb{R} : \forall R > 0, \exists t_n \rightarrow +\infty, \omega \cap]-R, R[= (\omega_* - t_n) \cap]-R, R[\}$$

Propriétés Si ω_* est un quasi cristal, alors

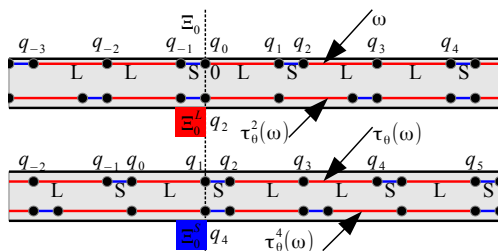
- Ω est un compact métrique
- $\tau_t(\omega) = \omega - t$ est minimal et uniquement ergodique
- $\Xi_0 = \{ \omega \in \Omega : 0 \in \omega \}$ est appelée transversale compacte canonique (la topologie induite est formée de clopens)
- le temps de retour $\theta : \Xi_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ est localement constant

$$\Xi_0 = \cup_{i=1}^r \Xi_0^i, \quad \theta(\omega) = \theta_i \quad \forall i = 1, \dots, r \quad \forall \omega \in \Xi_0^i$$

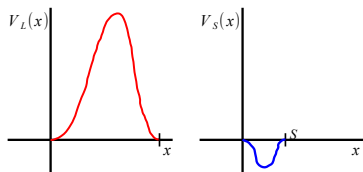
- en particulier, il existe des atlas de boîtes de flot

4-c. Un quasi cristal

Enveloppe de Fibonacci : $q_{n+1} - q_n \in \{L, S\}$, $\Xi_0 = \Xi_0^L \cap \Xi_0^S$



Modèle d'interaction de Fibonacci



$$E_\omega(x, y) = W(y - x) + V_\omega(x)$$

$$V_\omega(x) = V(\tau_x(\omega))$$

$$V(x) = \begin{cases} V_L(x) & \text{if } x \in [0, L] \\ V_S(x) & \text{if } x \in [0, S] \end{cases}$$

5. Résumé des deux modèles

Modèle général de type Bohr

- $d \geq 1$
- (Ω, τ_t) est un flot minimal
- $L(\omega, t) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est C^0 , super linéaire d'interaction

$$E_\omega(x, y) = L(\tau_x(\omega), y - x)$$

Modèle de type quasi cristal

- $d = 1$
- (Ω, τ_t) est un flot minimal et uniquement ergodique
- L is C^2 , super linéaire, localement transversalement constant et twist

$$\forall \omega \in \Omega, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 E_\omega}{\partial x \partial y}(x, y) < 0$$

IV. Résultats principaux

- ① Rappel des notations
- ② Ensemble de Mather
- ③ Résultats pour les modèles de type Bohr
- ④ Résultats pour les quasi cristaux

1. Rappel des notations

Modèle général de type Bohr : (Ω, τ_t, L)

- Ω : compact métrique
- $\tau_t : \Omega \rightarrow \Omega$: flot minimal
- $L(\omega, t) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^0 super linéaire en t

Energie d'interaction : pour chaque environnement $\omega \in \Omega$

$$E_\omega(x, y) = L(\tau_x(\omega), y - x)$$

qui est bien invariante par translation : $E_\omega(x + t, y + t) = E_{\tau_t(\omega)}(x, y)$

Configurations calibrées : pour un certain environnement ω

$$S_\omega(x, y) = \inf_{n \geq 1} \inf_{x=z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n=y} E_\omega(z_0, \dots, z_n) - n\bar{E}_\omega$$

$$\bar{E}_\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{z_0, \dots, z_n} \frac{1}{n} E_\omega(z_0, \dots, z_n)$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ est calibrée} \iff E_\omega(x_m, \dots, x_n) - (n - m)\bar{E} = S_\omega(x_m, x_n)$$

2. Ensemble de Mather

Problème principal Il n'existe pas d'opérateur Lax-Oleinik. Mais une théorie (duale) de mesures minimisantes existe.

Définition

- Il n'y a pas de flot dans $\Omega \times \mathbb{R}$, mais $\tau_t : \Omega \rightarrow \Omega$ existe
- une mesure de probabilité $\mu(d\omega, dt)$ est dite holonomique si

$$\int \phi(\omega) d\mu(\omega, t) = \int \phi(\tau_t(\omega)) d\mu(\omega, t), \quad \forall \phi \in C^0(\Omega)$$

- μ est dite minimisante si

$$\mu = \arg \min \left\{ \int L(\omega, t) d\mu(\omega, t) : \mu \text{ holonomique} \right\}$$

- On note de même ensemble de Mather

$$\text{Mather}(L) = \cup \left\{ \text{supp}(\mu) : \mu \text{ minimisante} \right\}$$

3. Résultats pour les modèles de type Bohr

Rappel L'énergie fondamentale

$$\bar{E} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\omega} \inf_{x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} E_{\omega}(x_0, \dots, x_n) = \bar{E}_{\omega}, \quad \forall \omega$$

Théorème Si (Ω, τ_t, L) est un modèle d'interaction de type Bohr

– $\text{Mather}(L)$ est un compact non vide \implies

$$\forall \omega \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \tau_t(\text{pr}^1 \text{Mather}(L)), \quad \exists (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ calibrée pour } \omega$$

$$E_{\omega}(x_m, \dots, x_n) - (n-m)\bar{E} = S_{\omega}(x_m, x_n) \text{ et } \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_{k+1} - x_k| < +\infty$$

– \bar{E} admet deux autres formulations :

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \inf \left\{ \int L d\mu : \mu \text{ minimisante} \right\} \\ &= \sup_{u \in C^0(\Omega)} \inf_{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}} \left\{ L(\omega, t) - [u(\tau_t(\omega)) - u(\omega)] \right\} \end{aligned}$$

Question Si $\omega \notin \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \tau_t(\text{pr}^1 \text{Mather}(L))$, \exists configurations calibrées ?

4. Résultats pour les quasi cristaux

Problème Il se peut que $\text{Mather}(L)$ soit réduit à un singleton

$$E_\omega(x, y) = \frac{|y - x - \lambda|^2}{2} + V_\omega(x), \quad \lambda = 0, \quad K_1, K_2 > 0$$

$$L(\omega, t) = \frac{|t - \lambda|^2}{2} + K_1(1 - \cos 2\pi\omega_1) + K_2(1 - \cos 2\pi\omega_2),$$

Ici : $\bar{E} = 0$, $\text{Mather}(L) = \{(0_{\mathbb{T}^2}, 0_{\mathbb{R}})\}$, $x_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, est l'unique configuration calibrée pour $\omega = 0_{\mathbb{T}^2}$ pour $\omega \notin \cup_t (t, t\sqrt{2})$, mystère !

Rappel Un quasi cristal est un modèle de type Bohr tel que $L(\omega, t)$ est C^2 le long des orbites, twist et localement transversalement constant





Théorème Si (Ω, τ_t, L) est un quasi cristal

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ il existe une configuration calibrée } (x_{n,\omega})_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$\sup_\omega |x_{0,\omega}| < +\infty, \quad \sup_\omega \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_{k+1,\omega} - x_{k,\omega}| < +\infty$$

En fait, le projeté de $\text{Mather}(L)$ rencontre toute orbite du flot $\tau_t(\omega)$

Bibliographie I

-  S. Aubry and P.Y. Le Daeron, The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions : I. Exact results for the ground states, *Physica D* 8 (1983), 381422.
-  A. Fathi, The weak KAM theorem in Lagrangian dynamics, book to appear, Cambridge University Press.
-  J. M. Gambaudo, P. Guiraud and S. Petite, Minimal configurations for the Frenkel-Kontorova, model on a quasicrystal, *Communications in Mathematical Physics* 265 (2006), 165188.
-  E. Garibaldi, S. Petite, Ph. Thieullen, Discrete weak-KAM methods for stationary uniquely ergodic setting, arXiv :1312.1967v1 [math.DS] 6 Dec 2013.