Université de Bordeaux
UF Mathématiques et Interactions 20 octobre 2017

Licence de Mathématiques

UE Structure algébrique 2

Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 Soit A un anneau (commutatif unitaire). Soient I, J des idéaux de A tels que $I + J = A$.

1. Soit $n \geq 1$. Soit I^n l'ensemble des éléments qui sont des sommes finies de produits $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ avec $x_1, \ldots, x_n \in I$. Montrer que I^n est un idéal de A.
2. Montrer que $I^n + J = A$ (en montrant que $1 \in I^n + J$).
3. Montrer que $I^n + J^m = A$ pour tous $n, m \geq 1$.
4. Prenons $A = \mathbb{R}[X, Y]$. Soient
$$I = X\mathbb{R}[X, Y] + Y\mathbb{R}[X, Y], \quad J = (X + Y - 1)\mathbb{R}[X, Y].$$
Montrer que $I + J = A$.
5. Dans l'exemple ci-dessus, décrire explicitement et le plus simplement possible I^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 Soit
$$\mathfrak{m} = 2\mathbb{Z}[X] + (X^2 + X + 1)\mathbb{Z}[X]$$
l'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par 2 et $X^2 + X + 1$. On va déterminer la structure de l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{m}$.

1. Montrer que $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ vu comme un polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, est irréductible. En déduire que
$$\mathbb{F}_4 := \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$$
est un corps. Notons t l'image de $X \in \mathbb{F}_2[X]$ dans l'anneau quotient $\mathbb{F}_4$.
2. Soit $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la surjection canonique. Soit
$$\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_4, \quad \sum_i a_i X^i \mapsto \sum_i s(a_i) t^i.$$
Montrer que φ est un homomorphisme d'anneaux surjectif.
3. Déterminer $\ker \varphi$.

4. Montrer que φ induit un isomorphisme $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}[X]/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{F}_4$, et que $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal.

Exercice 3 Soit A un anneau intègre, de corps des fractions K. Soit $S \subset A$ une partie telle que $0 \notin S$, $1 \in S$ et que $s_1 s_2 \in S$ pour tous $s_1, s_2 \in S$ (S est stable par multiplication). On note

$$S^{-1}A = \{\frac{a}{s} \in K \mid a \in A, s \in S\}.$$

C'est l'ensemble des fractions dans K qui admettent un dénominateur dans S.

1. Montrer que $S^{-1}A$ est un sous-anneau intègre de K, et que A est un sous-anneau de $S^{-1}A$.
2. Soit $x = a/s \in S^{-1}A$. Montrer que x est inversible dans $S^{-1}A$ si et seulement si $aA \cap S \neq \emptyset$.
3. Soit $f \in A$ un élément premier (c'est-à-dire que $f \neq 0$ et que fA est un idéal premier de A). Supposons que $fA \cap S = \emptyset$. Montrer que f est un élément premier de $S^{-1}A$.