DS Structure algébrique 2
20/10/2017.

Ex 1.

(1.) Les éléments de I^n sont de la forme

$$x_{11}x_{12}\cdots x_{1n} + x_{21}x_{22}\cdots x_{2n} + \cdots + x_{m1}\cdots x_{mn}$$

avec des m, ~~n~~ ≥ 1 variable et $x_{ij} \in I$.

On voit immédiatement que cet ensemble est un sous-groupe stable par multiplication par des éléments de A.

C'est donc un idéal.

(2). Il existe $\alpha \in I$, $\beta \in J$ tels que

$$1 = \alpha + \beta.$$

Il suit que

$$1 = (\alpha+\beta)^n = \underset{\substack{\uparrow \\ I^n}}{\alpha^n} + \underbrace{\beta\left(n\alpha^{n-1} + \binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta + \cdots + \beta^{n-1}\right)}_{\in J}$$

Donc $1 \in I^n + J$, d'où $A = I^n + J$

(3). On applique (2)

(4) On a

$$1 = \underset{I}{\underset{\cap}{(X+Y)}} + \underset{J}{\underset{\cap}{(1-X-Y)}}$$

D'où $A = I + J$

(5) Tout élément de I s'écrit

$$XF(X,Y) + YG(X,Y).$$

Le produit de n polynômes de cette forme, après développement est de la forme

$$X^nF_0 + X^{n-1}\cancel{F}F_1 + \dots + Y^nF_n \,,\quad F_i \in \mathbb{R}[X,Y].$$

Inversement, X^iY^j, $i+j=n$, est un élément de I^n. Donc I^n est l'idéal engendré par

$$X^n,\ X^{n-1}Y,\ X^{n-2}Y^2, \dots, XY^{n-1}, Y^n.$$

<u>Exercice 2</u>

(1) $X^2+X+1 \in \mathbb{F}_2[X]$ est un polynôme de degré 2, sans racine dans $\mathbb{F}_2$, donc irréductible sur $\mathbb{F}_2$.

Il suit que l'idéal $(X^2+X+1)\mathbb{F}_2[X]$

est maximal puisque $\mathbb{F}_2[X]$ est un anneau principal. Par conséquent $\mathbb{F}_4$ est un corps.

(2) On a

$$\varphi\Big(\sum_i a_i X^i + \sum_i b_i X^i\Big) = \varphi\Big(\sum (a_i+b_i) X^i\Big)$$

$$= \sum_i s(a_i+b_i)t^i = \sum_i (s(a_i)+s(b_i))t^i$$

$$= \sum_i s(a_i)t^i + \sum_i s(b_i)t^i$$

$$= \varphi\Big(\sum_i a_i X^i\Big) + \varphi\Big(\sum_i b_i X^i\Big)$$

$$\varphi(1) = s(1) = 1$$

$$\varphi\Big(\sum_i a_i X^i \cdot \sum_j b_j X^j\Big) = \varphi\Big(\sum_{i,j} a_i b_j X^{i+j}\Big)$$

$$= \varphi\Big(\sum_d \Big(\sum_{i+j=d} a_i b_j\Big) X^d\Big)$$

$$= \sum_d s\Big(\sum_{i+j=d} a_i b_j\Big) t^d$$

$$= \sum_d \Big(\sum_{i+j=d} s(a_i)s(b_j)\, t^{i+j}\Big)$$

$$= \Big(\sum_i s(a_i)t^i\Big)\Big(\sum_j s(b_j)t^j\Big) =$$

$$= \varphi(\sum_i a_i X^i)\, \varphi(\sum_j b_j X^j).$$

Donc φ est bien un homomorphisme d'anneaux.

Comme s est surjectif, il est clair que φ est surjectif car tout élément de $\mathbb{F}_4$ s'écrit comme $\sum_i c_i t^i$, $c_i \in \mathbb{F}_2$.

(3) $\varphi(\sum_i a_i X^i) = 0 \iff$

$\sum_i s(a_i) t^i = 0 \iff \sum_i s(a_i) X^i \in (X^2+X+1)\mathbb{F}_2[X]$

$\iff \sum_i s(a_i) X^i = (X^2+X+1) \sum_j c_j X^j$, $c_j \in \mathbb{F}_2$

On écrit $c_j = s(b_j)$ avec $b_j \in \mathbb{Z}$, alors

$\iff \sum_i s(a_i) X^i = (X^2+X+1) \sum_j s(b_j) X^j$

$\iff \sum_i a_i X^i - (X^2+X+1) \sum_j b_j X^j$ a tous ses coefficients $\in 2\mathbb{Z}$

$\iff \sum_i a_i X^i - (X^2+X+1) \sum b_j X^j \in 2\mathbb{Z}[X].$

Donc
$$\ker\varphi = (X^2+X+1)\mathbb{Z}[X] + 2\mathbb{Z}[X]$$
$$= m.$$

(4) Le théorème de factorisation des homomorphismes d'anneaux dit que φ induit un homomorphisme d'anneau
$$\mathbb{Z}[X]/\ker\varphi \longrightarrow \mathbb{F}_4$$
qui est injectif, et surjectif car φ est surjectif. D'où l'isomorphisme.

Le quotient $\mathbb{Z}[X]/m = \mathbb{Z}[X]/\ker\varphi$ étant un corps, m est un idéal maximal.

Exercice 3

(1) On a (*) $0 = \frac{0}{1} \in S^{-1}A$

(**) $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2} \in S^{-1}A$

si $s_1, s_2 \in S$, puisque $s_1 s_2 \in S$

(***) $\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} \in S^{-1}A$

(****) $1 = \frac{1}{1} \in S^{-1}A$.

Donc $S^{-1}A$ est un sous-anneau de K.

Il est intègre car K est intègre.

(2) $\frac{a}{s}$ est inversible dans $S^{-1}A$ $\Leftrightarrow \exists\, a' \in A$, $s' \in S$

t.q. $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = 1$. $\Leftrightarrow aa' = ss'$

$\Rightarrow$ $aa' \in aA \cap S$ et $aA \cap S \neq \emptyset$.

Inversement, si $aA \cap S \neq \emptyset$,

il existe $a' \in A$, $t \in S$ tels que

$aa' = t$.

Il suit que

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a's}{t} = 1$$

avec $\frac{a's}{t} \in S^{-1}A$. Donc $\frac{a}{s}$ est inversible dans $S^{-1}A$.

(3) On a $f \neq 0$ dans $S^{-1}A$. Il reste à montrer que $f \cdot S^{-1}A$ est un idéal premier si $fA \cap S = \phi$. Cette dernière condition implique que f n'est pas inversible dans $S^{-1}A$ d'après (2), donc $f \cdot S^{-1}A$ est un idéal propre.

Soient $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}A$ tels que $\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} \in f \cdot S^{-1}A$. Donc il existe $\frac{b}{s} \in S^{-1}A$ tel que

$$\frac{a_1}{s_1}\,\frac{a_2}{s_2} = f\cdot\frac{b}{s}$$

c'est-à-dire

$$a_1 a_2 s = f b s_1 s_2 \in fA.$$

Comme fA est un idéal premier, on a a_1 ou $a_2 \in fA$, ou $s \in fA$.

La dernière possibilité étant exclue par l'hypothèse $fA \cap S = \phi$, on a

a_1 ou $a_2 \in fA$, donc

$\frac{a_1}{s_1}$ ou $\frac{a_2}{s_2} \in f\cdot S^{-1}A$.