Université Bordeaux 1 — Année 2006–2007 — Session janvier 2007
Scolarité Licence — Étape : MAP5
UE : MAP501 ; Épreuve d'Algèbre 4
Date : 6 janvier 2007, 8h30-11h30
Durée : 3 heures
Documents interdits
Épreuve de M. Qing Liu

Exercice 1 Répondre aux questions suivantes par OUI, NON, ou, si vous n'êtes pas sûr(e) de la réponse, ne rien inscrire.

Attention : toute réponse incorrecte sera comptée négativement ! Il est inutile de recopier l'énoncé, reportez juste le numéro de la question (1.a, 1.b, 3.a etc) avec vos réponses.

1. Soit $F(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
   (a) Si $F(X)$ est primitif, alors il est irréductible ;
   (b) Si $F(X)$ est irréductible, alors il est primitif ;
   (c) Si $F(X)$ est unitaire, irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors il est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. L'anneau $\mathbb{Z}[X]$ est :
   (a) principal ;
   (b) factoriel ;
   (c) noethérien.
3. Soient $P(X,Y), Q(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y] \setminus \{0\}$ premiers entre eux.
   (a) Il existe $R(X,Y), S(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y]$ tels que
   $$R(X,Y)P(X,Y) + S(X,Y)Q(X,Y) = 1;$$
   (b) Si $P(X,Y)$ divise $Q(X,Y)F(X,Y)$ avec $F(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y]$, alors $P(X,Y)$ divise $F(X,Y)$;
   (c) Si $P(X,r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, alors $P(X,Y) = 0$.
4. Soient L/K une extension, L_1, L_2 des sous-extensions finies de L/K.
   (a) L_1L_2 est une extension finie de K ;
   (b) $[L_1L_2 : K] = [L_1 : K][L_2 : K]$;
   (c) $L_1 \cup L_2$ est une extension finie de K.

Exercice 2 Quels sont parmi les polynômes suivants ceux qui sont irréductibles ? Justifiez vos affirmations.

$$X^4 + 30X + 20 \in \mathbb{R}[X], \quad X^4 + 30X + 20 \in \mathbb{Q}[X], \tag{1}$$

$$X^2Y^4 + Y^2Z^4 + X^5Z \in \mathbb{Z}[X,Y,Z]. \tag{2}$$

Exercice 3 (Polynômes symétriques)

1. En développant $(X+Y)^4$, exprimer $X^4+Y^4 \in \mathbb{Z}[X,Y]$ en fonction de $X+Y$ et XY.
2. Exprimer $P(X,Y,Z) = X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 \in \mathbb{Z}[X,Y,Z]$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}[X,Y,Z]$.

Exercice 4 Soient p un nombre premier et $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$. Rappelons que $\mathbb{F}_{p^d}$ désigne une sous-extension de $\bar{\mathbb{F}}_p$ de degré d sur $\mathbb{F}_p$. Fixons un $a \in \mathbb{F}_p$.

1. Si a n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_p$, montrer que $\mathbb{F}_{p^2} = \mathbb{F}_p[\sqrt{a}]$, où $\sqrt{a}$ est une racine carré de a dans $\bar{\mathbb{F}}_p$.
2. Si a n'est pas un cube dans $\mathbb{F}_p$, montrer que $\mathbb{F}_{p^3} = \mathbb{F}_p[\sqrt[3]{a}]$, où $\sqrt[3]{a}$ est une racine cubique de a dans $\bar{\mathbb{F}}_p$.

Exercice 5 Notons $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ et

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

On sait que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau principal. Soit d un entier naturel impair sans facteur carré. Fixons une racine quatrième $\sqrt[4]{-d} \in \mathbb{C}$ de $-d$.

1. Montrer que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[i]) = \mathbb{Q}[i] \subset \mathbb{C}$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[i, \sqrt[4]{-d}]$ est un corps de décomposition de $X^4 + d \in \mathbb{Q}[X]$.
3. Montrer que $X^4 + d$, considéré comme un polynôme dans $\mathbb{Q}[i][X]$, est irréductible (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 6.3 ci-après).
4. Déterminer le degré $\left[\mathbb{Q}[i, \sqrt[4]{-d}] : \mathbb{Q}\right]$.

Exercice 6 Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. On souhaite connaître la décomposition de p en produit d'éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$.

1. Pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, on note $\bar{z} \in \mathbb{Z}[i]$ son conjugué (complexe) et $N(z) = z\bar{z}$.
   (a) Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$, on a $N(z_1) \in \mathbb{N}$ et $N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$.
   (b) Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que $z \in \mathbb{Z}[i]^*$ (ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$) si et seulement si $N(z) = 1$. En déduire que $\mathbb{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}$.
2. Décomposition de p dans $\mathbb{Z}[i]$.
   (a) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ non-inversibles tels que $p = z_1z_2$. Montrer que $p = N(z_1) = N(z_2)$, que z_1, z_2 sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$, et que $z_2 = \bar{z}_1$.
   (b) Montrer que si p n'est pas une somme de carrés $a^2 + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, alors p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
   (c) Montrer que dans le cas contraire, on a $p = N(f) = f\bar{f}$ avec $f, \bar{f} \in \mathbb{Z}[i]$ irréductibles.

(d) Dire si les nombres premiers $2, 3, 5, 7, 11$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.

3. Supposons que p est divisible par f^2 avec $f \in \mathbb{Z}[i]$ irréductible.

   (a) Montrer que $p = N(f)$ et que $\bar{f}$ est associé à f, i.e. $\bar{f} = uf$ avec $u \in \mathbb{Z}[i]^*$.

   (b) Montrer que si $u = \pm 1$, alors $f \in \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}i$.

   (c) Supposons $u = \pm i$. En écrivant $f = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, montrer que f est associé à $1 + i$.

   (d) Conclure que $p = 2$ et que f est associé à $1 + i$.

Après l'examen, on pourra consulter
`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~liu/Enseignement/map501-2006.html`
pour le corrigé, l'affichage des notes, ainsi que le jour de consultation des copies.